5.5 유리수처럼 보이지만 아닌 각

학습지

문제

STEP III 2022, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 θ가 유리수, 예를 들어 $\theta = \frac{p}{q}$도라고 가정하자. $\sin(k\theta) = 0$을 만족하는 양의 정수 k를 찾아라.

1단계 배각 공식(multiple-angle formulas)

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$로 쓰고 $\cos^k\theta$를 인수로 묶어 낸다. $(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k$를 전개하여 허수부(imaginary part)와 실수부(real part)를 비교한다. 그다음 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$을 이용한다.

2단계 홀짝성(parity)

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $\sec\theta = a$가 홀수(odd)인 정수일 때, $\sec^2\theta - 1$은 홀수인가, 짝수(even)인가?

잠깐, 직접 해 보기 $\sin(k\theta) = 0$을 만족하는 가장 작은 k를 잡는다. 그러면 사인 공식의 괄호 부분이 0이어야 한다. 왜 이것 때문에 k가 짝수일 수밖에 없는가? 그 다음 $\sin k\theta = 2\sin\frac{k\theta}{2}\cos\frac{k\theta}{2}$를 이용한다.

3단계 모순(contradiction)

다루는 내용: 소문항 (ii)

> **잠깐, 직접 해 보기** $m = \frac{k}{2}$로 두고 코사인 공식을 적용한다. 왜 괄호 부분은 결코 0이 될 수 없는가?

4단계 코탄젠트(cotangent) 버전

다루는 내용: 소문항 (iii)

> **생각해 보기** $\cot\phi = \frac{1}{b}$이면 $\sec^2\phi - 1$은 무엇인가? 그것은 짝수인가? 그다음 같은 논증을 그대로 적용한다.

숨은 수학

무리수 각만큼의 회전

θ가 도 단위로 유리수이면, θ만큼 계속 회전할 때 결국 출발점으로 돌아온다. θ가 무리수이면 결코 돌아오지 않으며, 놀라운 일이 일어난다. 점 $k\theta$들(360°를 법으로 생각한다)이 원 위에 **고르게** 퍼져서 모든 각에 얼마든지 가까이 다가간다. 이것이 **균등분포 정**

리(equidistribution theorem)로, 1910년 무렵 헤르만 바일(Hermann Weyl), 바츨라프 시에르핀스키(Wacław Sierpiński), Piers Bohl이 각자 독립적으로 증명하였다. 그림 5.5.1은 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$의 처음 40개 배수를 보여 준다. 이 점들은 이미 원을 채워 가고 있으며, 어느 점도 반복되지 않는다.

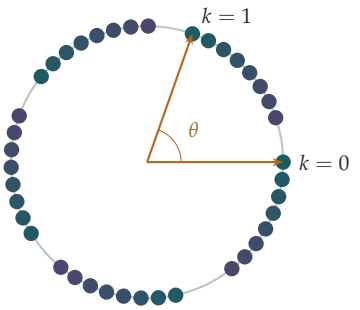

그림 5.5.1 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$일 때, $k = 0, 1, \ldots, 39$에 대한 각 $k\theta$의 점들(k가 커질수록 청록색에서 자두색으로 바뀐다). θ가 무리수이므로 어느 점도 반복되지 않으며, 점들은 원 전체에 고르게 퍼진다.

힐베르트의 세 번째 문제

1900년 힐베르트는 새로운 세기를 위한 스물세 개의 문제를 제시하였다. 그 세 번째 문제는 다음과 같다. 두 다면체(polyhedron)의 부피가 같다면, 한쪽을 유한 개의 다면체 조각으로 잘라 다시 이어 붙여 언제나 다른 쪽을 만들 수 있는가? (평면의 다각형에 대해서는 답이 "그렇다"이며, 이것이 월리스–보여이–게르비엔 정리(Wallace–Bolyai–Gerwien theorem)이다.) 1년도 안 되어 힐베르트의 제자 막스 덴(Max Dehn)은 답이 **아니다**임을 보였다. 정사면체는 잘라서 다시 이어 붙여 같은 부피의 정육면체로 만들 수 없다. 덴의 증명은 각 다면체에 모서리의 길이와 이면각(dihedral angle)으로 만든 양, 오늘날 **덴 불변량**(Dehn invariant)이라 부르는 양을 대응시키는데, 이 양은 자르고 다시 이어 붙여도 변하지 않는다. 정육면체에서는 이 값이 0이고, 정사면체에서는 0이 아닌데, 그 까닭은 바로 이면각 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이 $180°$의 유리수 배가 아니기 때문이다. 이것이 정확히 이 문제가 증명하는 내용이다.

니븐의 정리

이 이야기는 어디까지 나아갈까? 1956년 이반 니븐(Ivan Niven)은 θ가 도 단위로 유리수이고 $\cos\theta$가 유리수이면 $\cos\theta$는 $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ 가운데 하나임을 증명하였다. 따라서 코사인 값이 유리수인 "좋은" 각은 $0°, 60°, 90°, 120°, 180°$와 이와 관련된 각들뿐이다. 이 증명은 $2\cos\theta$가 정수 계수를 갖는 최고차항 계수가 1인 다항식(monic polynomial)의 근, 즉 **대수적 정수**(algebraic integer)라는 사실을 이용하며, 이는 Section 1.3의 끝에서 언급한 아이디

어이다.

더 도전하기

1 **정사면체.** 정사면체의 두 면 사이의 각이 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$이고, 메테인 분자에서 두 결합 사이의 각(정사면체의 중심에서 두 꼭짓점으로 향하는 선분 사이의 각)이 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$임을 보여라.

2 **3–4–5 삼각형.** 3–4–5 삼각형의 가장 작은 각이 도 단위로 무리수임을 보여라. (**힌트:** 이 각은 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$이다. 논증을 적절히 고치거나, 가우스 정수(Gaussian integer) $4+3\mathrm{i}$의 거듭제곱을 생각하여 어느 것도 실수가 아님을 보여라.)

3 **왜 a가 홀수인가?** $a=2$일 때 논증의 어디가 잘못되는가? $\cos^{-1}\frac{1}{2}$는 유리수인가?

4 **작은 경우에 대한 니븐의 정리.** 0°와 90° 사이에서 도 단위로 정수인 각 θ 가운데 $\cos\theta$가 유리수인 것을 모두 찾고, 그 목록이 니븐의 정리와 일치하는지 확인하여라.

더 읽을거리

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 삼각함수의 유리수 값에 관한 니븐의 정리가 실려 있다.
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** 힐베르트의 세 번째 문제를 다룬 장. 덴의 해법을 아름답게 설명한다.
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*** (A. K. Peters). 스물세 개 문제 모두에 얽힌 이야기를 들려준다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/rational-angles.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com