5.4 정다각형 속의 거리

학습지

문제

STEP III 2016, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q7

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 다각형의 꼭짓점을 1의 n제곱근 $X_k = \omega^k$에 놓자. P가 점 z일 때 $|PX_k|$를 z로 나타내면 무엇인가? 그렇다면 모든 거리의 곱은 무엇인가?

1단계 인수분해(factorisation)

다루는 내용: 인수분해

? **생각해 보기** 각 ω^k가 $z^n - 1$의 근(root)인 이유는 무엇인가? 또 이것들이 근의 전부인 이유는 무엇인가?

2단계 수직이등분선(perpendicular bisector) 위의 점

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 꼭짓점(vertex)을 $X_k = \omega^k$에 놓자. P가 점 z이면 $|PX_k| = |z - \omega^k|$이다. 모든 거리의 곱은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 X_0과 X_1에서 같은 거리에 있는 점들은 O를 지나는 직선 위에 있다. t를 실수로 하여 P를 $z = te^{i\pi/n}$로 쓰자. z^n은 무엇인가?

생각해 보기 n이 홀수일 때는 $t > 0$인 경우와 $t < 0$인 경우를 나누어 생각한다. 각 경우는 기하학적으로 무엇을 뜻하는가?

3단계 한 꼭짓점에서 그은 현(chord)

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 이제 $P = X_0$이고 거리 하나가 0이므로 $|z^n - 1|$은 쓸모가 없다. $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$을 근으로 갖지만 1은 근으로 갖지 않는 다항식(polynomial)은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 그 다항식을 $1 + z + \cdots + z^{n-1}$로 쓰고 $z = 1$을 대입한다.

숨은 수학

코츠(Cotes)의 정리

소문항 (i)은 로저 코츠의 정리이다. 코츠는 뉴턴(Newton)의 *Principia*(프린키피아) 제2판을 편집한 케임브리지의 뛰어난 젊은 수학자로, 1716년 서른세 살의 나이로 세상을 떠났다(뉴턴은 "그가 살았더라면 우리는 무언가를 알게 되었을 것이다"라고 말했다). 코츠는 P가 O에서 정n각형의 한 꼭짓점을 지나는 반직선 위에 있으면 P에서 꼭짓점들까지의 거리의 곱이 $||OP|^n - 1|$이고, P가 한 변의 중점을 지나는 반직선 위에 있으면 그 곱이 $|OP|^n + 1$임을 발견했다. 그는 복소수를 쓰지 않고 이 결과를 이용해 $x^n \pm 1$을 실수 계수

이차식들로 인수분해했는데, 이는 유리함수(rational function)를 적분하는 데 필요했다. 이 정리는 그가 죽은 뒤인 1722년에 출판되었다.

사인의 곱

$|1-\omega^k| = |e^{-i\pi k/n} - e^{i\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$이므로 소문항 (ii)는 다음을 말한다.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

이것은 Section 5.3의 코사인 곱과 짝을 이룬다. 이와 관련된 곱은 z^n-1의 **판별식**(discriminant)을 준다. 서로 다른 1의 n제곱근의 모든 쌍 사이 거리의 제곱을 곱하면 n^n이다. 판별식은 다항식의 근들이 서로 얼마나 떨어져 있는지를 재며, 다항식의 대수학과 수체(number field)의 대수학에서 핵심적인 역할을 한다. 이 내용은 6장에서 다룬다.

정전기학과 균등한 간격

물리적으로 해석할 수도 있다. 원 위에 크기가 같은 전하 n개를 놓자. (2차원 정전기학의 로그 퍼텐셜을 쓸 때) 퍼텐셜 에너지를 최소화하는 배치는 정다각형이며, 그 에너지에는 정확히 $\sum \ln|X_jX_k|$, 즉 거리의 곱의 로그가 들어 있다. "가능한 한 넓게 퍼진" 점들은 수치해석(Section 3.6에서 최적의 보간점은 $x=\cos\theta$를 통해 정다각형에서 나온다)과 무작위 행렬(random matrices) 이론에서 중요하다.

더 도전하기

1 **작은 경우 확인하기.** 정사각형($n=4$)과 정삼각형($n=3$)에 대해 소문항 (ii)를 직접 확인하여라.

2 **꼭짓점을 지나는 경우.** P가 O에서 X_0을 지나는 반직선 위에 있으면 $|PX_0|\times\cdots\times|PX_{n-1}| = ||OP|^n - 1|$임을 보여라.

3 **평균 거리.** 소문항 (ii)와 Section 3.2의 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 이용하여 X_0에서 그은 $n-1$개의 현의 평균 길이가 $n^{1/(n-1)}$ 이상임을 보여라. 실제 평균 $\frac{1}{n-1}\sum_k 2\sin\frac{k\pi}{n}$을 $n=6$일 때 구하고 비교하여라.

4 **모든 현.** 심화 단위원에 내접하는 정n각형의 $\binom{n}{2}$개 현의 길이를 모두 곱하면 $n^{n/2}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 복소수를 이용한 기하학을 아름다운 그림과 함께 다룬다.
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems*** (Mathematical Association of America). 정다각형에 관한 우아한 문제 여러 개가 실려 있다.
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher*** (Cambridge University Press). 코츠의 생애와 그의 수학을 다룬 전기이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.4절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/polygon-distances.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com