5.3 $z^{2n}+1$의 인수분해

학습지

문제

STEP III 2013, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 복소평면(complex plane)에서 $z^{2n} = -1$의 해들은 어디에 있는가? $n = 2$와 $n = 4$일 때 그려 보아라.

1단계 켤레 쌍은 실수 이차식을 준다

다루는 내용: 인수분해

? **생각해 보기** $(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})$를 전개하고 가운데 계수(coefficient)를 간단히 정리하라.

2단계 인수분해(factorisation)

다루는 내용: 인수분해

잠깐, 직접 해 보기 $z^{2n}=-1$의 $2n$개의 해를 켤레(conjugate) 쌍 $e^{\pm \mathrm{i}\theta_k}$로 나열하라. θ_k는 무엇인가? 왜 이것들이 근(root)의 전부인가?

3단계 $z = \mathrm{i}$ 대입하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta + 1$은 무엇인가? 또 n이 짝수일 때 $\mathrm{i}^{2n} + 1$은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 n이 짝수일 때 $(-2\mathrm{i})^n$을 간단히 하라.

4단계 n이 홀수일 때

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 n이 홀수이면 각 θ_k 가운데 하나가 $\frac{\pi}{2}$와 같다. 어느 것인가? 그 때문에 왜 $z=\mathrm{i}$를 그대로 대입하는 것은 쓸모가 없는가?

잠깐, 직접 해 보기 인수분해의 양변을 $1+z^2$으로 나눈 다음 $z=\mathrm{i}$를 대입하라. 남은 코사인들을 짝지어 보라. $\cos\theta_{n+1-k}$는 $\cos\theta_k$와 어떤 관계인가?

숨은 수학

대수학의 기본정리

$z^{2n}+1$이 $\mathbb{C}$ 위에서 일차 인수들로 완전히 인수분해된다는 사실은 **대수학의 기본정리**(*fundamental theorem of algebra*)의 특수한 경우이다. 이 정리는 복소수 계수의 상수가 아닌 모든 다항식이 복소수 근을 가지며, 따라서 일차 인수들로 완전히 인수분해된다는 것이다. 가우스(Gauss)는 1799년 박사 학위 논문에서 널리 인정받은 최초의 증명을 내놓았고, 이후에도 여러 차례 이 정리로 돌아와 새로운 증명을 제시하였다. 이 정리의 결과로, 실수가 아닌 근은 1단계에서 본 것과 똑같이 켤레 쌍으로 나타나므로, 모든 실수 계수 다항식은

실수 계수의 일차 인수와 이차 인수들로 인수분해된다. 이 정리는 이름은 "대수학"이지만 실질은 해석학이다. 모든 증명은 연속성 같은 실수의 어떤 성질을 사용하며, 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 가장 매끄러운 증명 가운데 하나를 보게 될 것이다.

사인과 코사인의 곱

이 방법으로 항등식들을 한 무리 얻을 수 있다. $z^{2n}+1$ 대신 z^n-1을 사용하면

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

을 얻으며, 이것의 기하학적 형태는 Section 5.4에서 증명된다. 이런 항등식들은 진동계의 분석(용수철로 연결된 n개의 질점의 진동수에는 $\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$이 나타난다)과 세기 문제(어떤 그래프(graph)의 신장 트리(spanning tree)의 개수나 직사각형의 도미노 타일링(domino tiling)의 개수가 코사인들의 곱으로 주어진다)에 등장한다. $m\times n$ 직사각형의 도미노 타일링에 대한 Kasteleyn의 1961년 공식은 $\cos^2\frac{j\pi}{m+1}$과 $\cos^2\frac{k\pi}{n+1}$로 이루어진 식들의 이중 곱이다.

더 도전하기

1 **칠각형과 관련된 곱.** 소문항 (ii)에 $n=7$을 적용하여 $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$임을 보여라. 그리고 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$임을 보여라. (**힌트:** $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$를 이용하여 각들 사이의 관계를 찾거나, 항등식 $\sin 2x=2\sin x\cos x$를 반복해서 사용하여라.)

2 **또 다른 대입.** 인수분해에 $z=1$을 대입하여 다음을 보여라.

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n} = 2^{\frac{1}{2}-n}.$$

3 **z^6+1을 인수분해하기.** z^6+1을 세 개의 실수 계수 이차식의 곱으로 나타내고, 전개하여 답을 확인하여라.

4 **사인.** $z^{2n}-1$을 같은 방법으로 인수분해하고 z^2-1로 나누어 다음을 보여라.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

더 읽을거리

► **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 『시각적 복소

해석학』. 2장에서 1의 거듭제곱근(roots of unity)과 다항식을 아름다운 그림과 함께 다룬다.

- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra*** (Springer). 『대수학의 기본정리』. 해석학, 대수학, 위상수학(topology)에서 나온 이 정리의 여러 증명을 학부생을 위해 서술하였다.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale*** (Princeton University Press). 『허수 이야기』. 1의 거듭제곱근과 그 쓰임을 포함한 $\sqrt{-1}$의 역사.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/z2n-plus-one.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com