5.2 단위근 필터

학습지

문제

STEP I 1990, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s1-q2

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** ω는 $z^3 - 1 = 0$의 근이다. $z^3 - 1$을 인수분해(factorise)하여라. 이로부터 왜 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이 성립하는가?

1단계 절댓값과 편각

다루는 내용: 1의 세제곱근

? **생각해 보기** $1 + \omega + \omega^2 = 0$으로부터 $1 + \omega^2$과 $1 + \omega$를 부호를 제외하고 ω의 거듭제곱 하나로 나타내어 보자. 이들의 절댓값(modulus)과 편각(argument)은 무엇인가?

2단계 거르개

다루는 내용: 항등식

생각해 보기 k가 3의 배수일 때 $1+\omega^k+\omega^{2k}$의 값은 무엇인가? 3의 배수가 아닐 때는 어떠한가?

잠깐, 직접 해 보기 $r=1,2,3$에 대하여 $(1+\omega^r)^n$을 각각 이항정리(binomial theorem)로 전개하여 모두 더해 보자. 그런 다음 앞에서 구한 절댓값과 편각을 이용하여 같은 합을 계산해 보자.

3단계 두 가지 계산

다루는 내용: $n = 25$인 경우와 두 번째 합

생각해 보기 $n = 25$일 때: 2π의 어떤 배수가 $\frac{25\pi}{3}$에 가까운가?

잠깐, 직접 해 보기 두 번째 합에서는 3으로 나눈 나머지가 2인 위치 k가 필요하다. 이러한 k를 대신 골라내려면 거르개를 어떻게 옮기면 되는가?

숨은 수학

이산 푸리에 변환

3을 임의의 N으로, ω를 $e^{2\pi \mathrm{i}/N}$로 바꾸어 보자. 수의 목록 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$에 대하여 수

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

들은 이 목록의 **이산 푸리에 변환**을 이루며, 필터 항등식 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 또는 0 덕분에 $\hat{a}_r$로부터 a_k를 복원할 수 있다. 이 변환은 신호를 그 구성 주파수들로 분해한다. 1965년 제임스 쿨리(James Cooley)와 존 튜키(John Tukey)는 이 변환을 N^2단계 대신 약 $N \log_2 N$단

계 만에 계산하는 방법, 곧 **고속 푸리에 변환**(fast Fourier transform)을 발표하였다. 가우스(Gauss)는 1805년에 본질적으로 같은 아이디어를 발견하였지만 끝내 발표하지 않았다. FFT는 오디오와 이미지 압축(MP3와 JPEG), 휴대전화 신호, 의료 영상 장비, 그리고 엄청나게 큰 수의 곱셈에 쓰이며, 20세기의 가장 중요한 알고리즘 가운데 하나로 자주 꼽힌다.

생성함수

이 필터는 더 큰 아이디어의 한 사례이다. 수열(sequence) $a_0, a_1, a_2, \ldots$는 다항식이나 멱급수(power series) $A(x) = \sum a_k x^k$로 묶어 나타낼 수 있는데, 이것을 수열의 **생성함수**(generating function)라 한다. 그러면 수열에 대한 연산이 함수에 대한 연산이 된다. 1에서 값을 구하면 수열의 합이 되고, 1의 거듭제곱근에서 값을 구하면 잉여류(residue class)를 골라내며, 미분하면 각 항에 k를 가중치로 곱하게 된다. 이 방법은 많은 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주며, 9장의 핵심 기법이다. 같은 필터를 1의 다섯제곱근과 함께 $(1+x)^n$에 적용하면 정오각형(regular pentagon)과 황금비(golden ratio)로 이어진다. 1의 거듭제곱근의 대수는 Section 6.1에서 더 깊이 다룬다.

더 도전하기

1 **짝수 번째 자리.** 1의 제곱근(1과 -1)으로 필터를 사용하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$임을 보여라.

2 **나머지 한 부류.** $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$에 대한 공식을 구하고, 세 공식을 더하면 2^n이 됨을 확인하여라.

3 **네 번째마다.** i를 사용하여 $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$임을 보여라.

4 **나누어떨어짐.** $\{1, 2, \ldots, 12\}$의 부분집합(subset) 가운데 원소의 개수가 3으로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가? 원소의 합이 3으로 나누어떨어지는 것은 몇 개인가? (**두 번째 질문의 힌트:** $\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$를 1의 세제곱근에서 생각해 보아라.)

더 읽을거리

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (A. K. Peters; 온라인 무료 공개). 생성함수에 대한 즐거운 입문서로, 1의 거듭제곱근 필터가 앞부분에 나온다.
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count*** (Mathematical Association of America). 이항 항등식을 세기로 증명하는 책이다.
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis*** (Cambridge University Press). 이산 푸리에 변환과 FFT를

다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/roots-filter.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com