5.1 마친의 공식

학습지

문제

STEP III 1987, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/87-s3-q3

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $5 - \mathrm{i}$의 편각은 무엇인가? $1 + \mathrm{i}$의 편각은? 복소수를 곱하면 편각은 어떻게 되는가?

1단계 절댓값(modulus)의 한계

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 상계(upper bound)를 구하려면 양변을 제곱한다. 양변은 모두 음이 아니다.

잠깐, 직접 해 보기 하계(lower bound)를 구하려면 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$를 $(|x|, |y|)$와 단위벡터(unit vector)의 내적(dot product)으로 생각한다. 내적은 얼마나 커질 수 있는가?

2단계 핵심이 되는 곱셈

다루는 내용: 소문항 (ii), 첫 번째 공식

생각해 보기 복소수(complex number)를 곱하면 편각(argument)끼리 더해진다. $5-\mathrm{i}$와 $1+\mathrm{i}$의 편각은 무엇인가? 그다음 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$를 단계별로 계산한다.

잠깐, 직접 해 보기 얻은 답의 편각은 무엇인가? 소문항 (i)을 이용하거나 각의 크기를 이용하여 2π의 배수가 더 붙지 않음을 보인다.

3단계 두 번째 공식

다루는 내용: 소문항 (ii), 두 번째 공식

생각해 보기 같은 방식으로 생각하면, 어떤 복소수들의 곱이 편각 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$를 가지는가? 그 곱을 전개한다.

숨은 수학

손으로 π 계산하기

마친의 공식은 왜 계산에 그토록 유용할까? 급수 $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$는 $|x| \le 1$에서 수렴하지만, $x = 1$에서는 고통스러울 만큼 느리게 수렴한다. $\frac{\pi}{4}$를 소수점 아래 세 자리까지 구하려면 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$의 항이 약 천 개나 필요하다. $x = \frac{1}{5}$이면 각 항이 앞의 항보다 약 25배씩 작아져서 항 하나당 대략 1.4자리를 얻고, $x = \frac{1}{239}$이면 항 하나당 약 4.8자리를 얻는다. 마친의 100자리 계산에는 첫 번째 급수의 항 약 70개와 두 번째 급수의 항 20개 정도만 필요했다. 1873년 William Shanks는 마친형 공식을 이용해 707자리를 계산하느라 수년을 계산에 쏟았는데, 1944년에 그가 528번째 자리에서 실수를 했고 그 뒤의 자리는 모두 틀렸다는 사실이 밝혀졌다.

다시 만나는 가우스 정수

a, b가 정수일 때 $a + b\mathrm{i}$ 꼴의 수는 Section 1.6에서 다룬 **가우스 정수**(Gaussian integers)이다. $5 - \mathrm{i}$가 이렇게 잘 들어맞는 이유는 인수분해(factorisation)에 있다. $239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$이고, 이를 가우스 정수에서 쓰면 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4(3 - 2\mathrm{i})^4$가 되며, $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$도 같은 가우스 소수(Gaussian primes)들로 이루어져 있다. 마친형 공식을 찾는 일은 사실 $n^2 + 1$ 꼴의 수를 인수분해하는 문제이다. 1899년 Carl Størmer는 바로 이 아이디어를 이용하여, a, b, m, n이 정수일 때 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 꼴의 공식은 마친의 공식과 오일러(Euler), Hermann, Hutton이 찾은 세 공식, 이렇게 네

개뿐임을 증명했다.

회전

절댓값이 1인 복소수를 곱하는 것은 평면의 회전이다. 그래서 복소수는 이 장 뒷부분의 기하학에서부터 전기공학의 교류, 양자역학의 파동함수에 이르기까지 회전과 각이 관련된 모든 것을 나타내는 자연스러운 언어가 된다. Section 4.2에서는 $\tan^{-1}$의 덧셈정리를 교묘한 치환으로 얻었지만, 여기서는 복소수의 곱셈에서 얻었다. 두 가지는 같은 사실을 서로 다른 쪽에서 본 것이다.

더 도전하기

1 **사촌 격인 문제.** STEP II 2000, 4번 문제 (step.maths.org/questions/00-s2-q4)에 도전해 보라. 이 문제는 이 절과 같은 방법, 즉 복소수를 곱하고 편각을 읽어 내는 방법으로 $\frac{\pi}{4}$에 대한 또 다른 아크탄젠트 공식을 증명한다.

2 **오일러의 공식.** $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$를 생각하여 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$임을 보여라.

3 **Hutton의 공식.** $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$임을 보여라.

4 **항이 몇 개 필요할까?** 마친의 공식으로 π를 소수점 아래 20자리까지 계산하려면 각 급수의 항이 몇 개씩 필요한지 어림해 보라. 그다음 계산기로 처음 몇 자리를 직접 계산해 보라.

더 읽을거리

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 마친형 공식의 역사를 담고 있다.
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed*** (Springer). π를 계산하는 옛 방법과 새 방법을 생동감 있게 소개한다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 복소수를 기하학적으로 보는 데 가장 좋은 책이다. 제1장은 회전과 확대로서의 곱셈을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/machin.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com