4.9 홀디치의 정리

학습지

문제

STEP III 2011, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q5

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 가장 간단한 경우에 정리를 확인해 보자. C가 반지름이 R인 원이라면 P는 어떤 곡선을 그리며, 고리의 넓이는 얼마인가?

1단계 좌표로 구하는 넓이

다루는 내용: 넓이 공식

> ? **생각해 보기** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이고 이들이 모두 t의 함수(function)일 때, $\dot{x}$와 $\dot{y}$를 구한 다음 $x\dot{y} - y\dot{x}$를 계산한다.

2단계 막대의 양 끝

다루는 내용: A와 B의 좌표

생각해 보기 막대는 A에서 B 쪽으로 $(\cos t, \sin t)$ 방향을 향한다. P는 양 끝에서 각각 얼마나 떨어져 있는가?

3단계 OA가 쓸고 지나간 넓이

다루는 내용: OA가 쓸고 지나간 넓이

생각해 보기 $(*)$를 A에 적용한다. $x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$를 전개하고 항들을 a의 거듭제곱에 따라 정리한다.

잠깐, 직접 해 보기 각 항의 묶음을 0부터 2π까지 적분(integrate)한다. $[B]$의 경우: B는 A에 대한 식에서 a를 무엇으로 바꾼 것인가?

4단계 f 소거하기

다루는 내용: $\mathcal{C}$와 $\mathcal{D}$ 사이의 넓이

> **잠깐, 직접 해 보기** A와 B는 모두 같은 곡선 $\mathcal{C}$를 한 바퀴 돈다. 이로부터 $[A]$와 $[B]$에 대해 무엇을 알 수 있는가? 이를 이용하여 f를 구한다.

숨은 수학

그린 정리와 구적기

공식 $(*)$는 **그린 정리**(Green's theorem)의 특수한 경우이다. 그린 정리는 폐곡선을 따라 도는 적분을 그 곡선 내부 영역에서의 적분과 연결한다. 넓이에 관한 형태로 쓰면, 곡선이 둘러싼 넓이는 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$이며, 이 적분은 경계를 따라 한 바퀴 도는 것만으로 계산할 수 있다. 공학자들은 이 사실을 **구적기**(planimeter)에 활용했다. 구적기는 19세기에 발명된 기계 장치로(그중 가장 성공한 것은 Jakob Amsler가 1854년에 설계한 것이다), 지도나 도면 위 도형의 경계를 바늘로 따라가면 바퀴가 둘러싸인 넓이를 기록한다. 구적기는 토지 면적을 재거나, 지압 선도(indicator diagram)로부터 증기 기관이 한 일을 계산하는 등 여러 용도로 쓰이다가 디지털 방식으로 대체되었다. Holditch의 정리는 이와 밀접한 관련이 있다. 막대는 구적기의 팔과 같다.

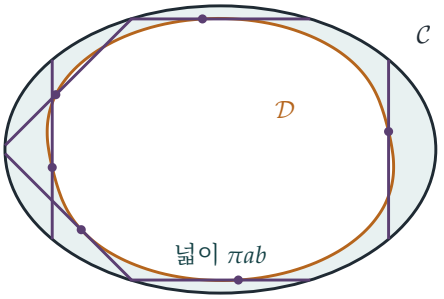

그림 4.9.1 반축(semi-axis)의 길이가 3과 2인 타원(ellipse)과, $a = 1, b = 1.5$인 길이 2.5의 막대에 대한 Holditch의 정리. 막대의 몇 가지 위치(자주색)와 점 P를 표시했다. P가 그리는 곡선 $\mathcal{D}$(주황색)는 수치적으로 계산한 것이며, 두 곡선 사이의 색칠한 고리의 넓이는 정리가 예측한 대로 정확히 $4.7124\ldots = 1.5\pi$이다.

숨은 조건

Holditch는 조건에 크게 신경 쓰지 않고 정리를 진술했지만, 이 정리에는 몇 가지 조건이 필요하다. 막대가 두 끝을 곡선 위에 둔 채로 끝까지 한 바퀴 돌 수 있어야 하고, 그려지는 곡선 $\mathcal{D}$는 한 번만 그려지는 단순 폐곡선(simple closed curve)이어야 한다. 막대가 $\mathcal{C}$의 폭에 비해 너무 길면 $\mathcal{D}$가 스스로 교차할 수 있고, 그러면 공식이 주는 "넓이"는 어떤 영역을 두 번 세거나 음의 부호로 센다. 이 문제는 $\mathcal{D}$가 O를 포함하는 볼록 곡선이라고 가정함으로써 이런 어려움을 피한다. 정리가 정확히 언제 성립하는지 밝히는 일은 아름다운 아이디어를 어떻게 엄밀하게 다듬어야 하는지 보여 주는 좋은 예이며, 이는 3장의 주제이기도 하다.

더 도전하기

1 **타원의 넓이.** $x = p\cos t, y = q\sin t$로 놓고 $(*)$를 이용하여 반축의 길이가 p와 q인 타원의 넓이가 πpq임을 보여라.

2 **원의 경우.** 두 현의 정리를 증명하라. 곧, 원의 두 현이 P에서 만나면 각 현의 두 선분의 길이의 곱이 서로 같음을 보여라. 이로부터 원에 대한 Holditch의 정리를 이끌어 내라.

3 **중점.** $f = \pi(a - b)$이므로 P가 막대의 중점일 때 $f = 0$임을 보여라. 이때 고리의 넓이를 막대의 길이 L로 나타내면 얼마인가?

4 **삼각형.** 심화꼭짓점이 $(0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$인 삼각형의 경계를 따라 돌면서 $(*)$를 이용하여 그 넓이를 구하고, 넓이가 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$임을 보여라. 이것이 임의의 다각형의 넓이를 구하는 "신발끈 공식"(shoelace formula)의 출발점이다.

더 읽을거리

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic*** (Princeton University Press). 막대, 바퀴, 용수철을 이용한 물리적 추론으로 수학적 결과를 증명하는 책으로, 이 절과 같은 정신을 담고 있다.
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That*** (Norton). 그린 정리를 포함하여 벡터 미적분학(vector calculus)을 편안하게 소개하는 입문서이다.
- **Hamnet Holditch, "Geometrical theorem"**, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858). 원래의 짧은 글로, 숨은 조건은 전혀 언급하지 않은 단 한 문단짜리이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.9절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/holditch.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com