4.8 공 모양 빵 자르기

학습지

문제

STEP I 2001, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 반지름이 a인 구는 어떤 곡선을 x축을 중심으로 회전시켜 얻는가? 그 곡선에 대해 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 무엇인가?

1단계 껍질 공식이 간단해진다

다루는 내용: 껍질은 조각 수에 비례한다

생각해 보기 어떤 곡선을 x축을 중심으로 회전시키면 반지름이 a인 구(sphere)가 되는가? 그 곡선에 대해 $\frac{dy}{dx}$는 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 그 곡선에 대해 $y\sqrt{1+(y')^2}$를 계산해 보아라. 놀라운 일이 일어난다.

2단계 껍질은 조각 수에 비례한다

다루는 내용: 껍질은 조각 수에 비례한다

생각해 보기 그렇다면 두께가 h인 조각의 껍질(crust) 넓이는 얼마인가? 이 값은 조각의 위치에 따라 달라지는가?

3단계 껍질 조건

다루는 내용: 반지름에 대한 조건

생각해 보기 힌트를 따라 $x = a$ 쪽 끝에서부터 조각을 먹어서, 남은 부분이 $x = -a$부터 $x = -a + t$까지가 되도록 하자. V와 A를 계산하여라. $s = x + a$로 치환(substitution)하면 도움이 된다.

잠깐, 직접 해 보기 이 규칙은 조각을 몇 개 먹은 뒤에도 성립해야 하므로, $0 < t \leq 2a$인 모든 t에 대해 성립해야 한다. 이 범위에서 $\frac{V}{A}$의 최댓값은 얼마인가?

4단계 문제 너머: $2\frac{2}{3}$이면 충분한가?

다루는 내용: 문제 너머

> **생각해 보기** 문제에서 묻지는 않았지만, a에 대한 조건은 충분조건이기도 한가? 양쪽 끝에서 조각을 먹으면 어떻게 되는가?

숨은 수학

아르키메데스의 모자 상자 정리

아르키메데스는 *On the Sphere and Cylinder*(구와 원기둥에 대하여)에서, 평행한 두 평면 사이에 있는 구의 띠의 넓이가 그 두 평면이 구를 감싸는 원기둥에서 잘라 내는 띠의 넓이와 같음을 증명하였다(그림 4.8.1). 우리의 계산이 바로 이 정리이다. 반지름이 a인 원기둥은 단위 길이당 껍질 넓이가 $2\pi a$이고, 구도 마찬가지이다. 구 전체를 생각하면, 구의 겉넓이는 원기둥의 옆넓이 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$과 같다. 아르키메데스는 이 결과를, 구의 부피가 원기둥 부피의 3분의 2라는 사실과 함께 자신의 가장 훌륭한 업적으로 여겼다. 기원전 75년에 시라쿠사를 방문한 키케로(Cicero)는 무덤에 새겨진 구와 원기둥을 찾아서, 수풀에 뒤덮인 그의 무덤을 발견하였다.

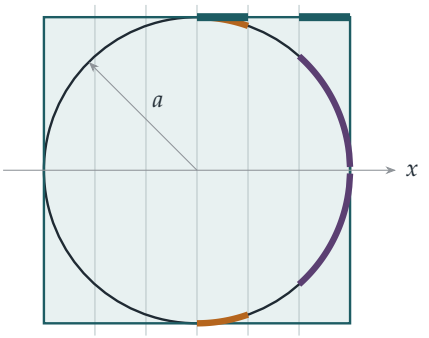

그림 4.8.1 감싸는 원기둥 안에 놓인 반지름 a인 공 모양 빵의 단면으로, 같은 두께의 조각으로 잘려 있다. 가운데 조각(호박색)은 축에서 멀리 떨어진 짧고 거의 수평인 껍질 호를 가지고, 끝 조각(자두색)은 축에 가까운 길고 가파른 호를 가진다. x축을 중심으로 회전시키면, 두 조각 모두 원기둥의 대응하는 띠(청록색)와 정확히 같은 껍질 넓이, 곧 두께에 $2\pi a$를 곱한 값을 준다.

지구의 지도

모자 상자 정리를 이용하면 넓이를 보존하는 지구 지도를 그릴 수 있다. 지구본의 각 점을 감싸는 원기둥 위로 수평 방향 바깥쪽으로 투영한 다음 원기둥을 펼치면 된다. 구의 띠는 넓이가 같은 원기둥의 띠로 옮겨지고, 어떤 영역에 대해서도 마찬가지이다. 이것이 **람베르트**(*Lambert*) **원통 정적 도법**(1772)이다. 이 도법은 극 근처에서 모양을 심하게 왜곡하지만 넓이는 정직하게 나타낸다. 이는 그린란드를 아프리카만큼 크게 보이게 하는(실제로는 약 14분의 1 크기이다) 익숙한 메르카토르(Mercator) 도법과 다른 점이다. 가우스(Gauss)의 유명한 정리인 **빼어난 정리**(*Theorema Egregium*)(1827)는 구의 어떤 지도도 넓이와 모양을 동시에 보존할 수 없음을 보여 준다. 지구의 모든 평면 지도는 무언가를 왜곡할 수밖에 없다.

구 위의 무작위 점

실용적인 결과도 하나 있다. 구 위에서 점을 균등하게 무작위로 고르려고 위도와 경도를 균등하게 고르면, 점들이 극 근처에 몰리게 된다. 모자 상자 정리는 올바른 방법을 알려 준다. 높이 x를 $-a$와 a 사이에서 균등하게, 경도를 0과 2π 사이에서 균등하게 고르면 된다. 넓이가 높이에 비례하므로 이것은 정확히 균등 분포이다. 물리학과 컴퓨터 그래픽스의 컴퓨터 시뮬레이션에서 이 방법을 쓴다. (놀랍게도 이 방법은 3차원에서만 통한다. 4차원 이상의 구에 대해서는 이에 대응하는 명제가 거짓이다.)

더 도전하기

1 **빵 전체.** 자르지 않은 빵 전체에 대해 $V/A = \frac{a}{3}$임을 보여라. 문제의 조건이 $\frac{a}{3} < 1$보다 만족하기 어려운 이유는 무엇인가?

2 **열대 지방.** 지구 표면 가운데 남위 23.4°와 북위 23.4° 사이에 있는 부분은 몇 분의 몇인가? (지구를 구로 생각하여라. 넓이가 높이에 비례하므로 $\sin 23.4^\circ$만 있으면 된다.)

3 **다른 모양.** 포물면 모양의 빵($y = \sqrt{x}$를 x축을 중심으로 회전)에서는 조각당 껍질이 상수가 아님을 보여라. 어떤 곡선 $y(x)$에 대해 $y\sqrt{1 + (y')^2}$가 상수인가? (미분방정식(differential equation)을 풀어라.)

4 **부피.** 부피 공식을 이용하여, 아르키메데스가 밝혔듯이 구의 부피가 감싸는 원기둥 부피의 3분의 2임을 보여라.

더 읽을거리

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?*** (Mathematical Association of America). 아르키메데스의 수학을 현대 독자를 위해 설명한다.
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). 기하학을 다룬 장에서 곡면의 기하학을 소개한다.
- **John Snyder, *Flattening the Earth*** (University of Chicago Press). 2천 년에 걸친 지도 투영법의 역사.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/spherical-loaf.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com