4.7 변분법

학습지

문제

STEP III 2014, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $I \geq 0$이 왜 자명하지 않은가? $y(1) = 0$을 만족하는 $y = 1 - x$를 넣어 보자.

1단계 완전제곱식 만들기(completing the square)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 I_1에서 제곱을 전개하고 $I - I_1$을 계산한다. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$를 이용한다.

잠깐, 직접 해 보기 피적분함수(integrand) $y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$는 어떤 함수의 도함수(exact derivative)이다. 무엇의 도함수일까? 그런 다음 $y(1) = 0$을 이용한다.

2단계 언제 $I = 0$일까?

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 연속(continuous)이고 음이 아닌(non-negative) 함수의 적분이 0이면, 그 함수에 대해 무엇을 말할 수 있을까?

잠깐, 직접 해 보기 따라서 $y' + y\tan x = 0$이다. 이 식을 풀고($\sec x$를 곱한다), $y(1) = 0$을 이용한다.

3단계 일반적인 경우

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$로 소문항 (i)의 과정을 반복한다. 남는 항들이 어떤 함수의 도함수가 되려면 b는 무엇이어야 할까?

잠깐, 직접 해 보기 이 논증은 어디에서 성립하지 않을 수 있을까? $0 \le x \le 1$에서 $\tan ax$를 살펴본다.

4단계 임계적인 경우

다루는 내용: $a = \frac{\pi}{2}$인 경우

> **생각해 보기** 소문항 (i)에서 $I = 0$이 되게 하는 함수는 $y' + y\tan x = 0$을 만족했을 것이다. 이제 이에 대응하는 방정식은 무엇이고, 그 해는 무엇인가? $a = \frac{\pi}{2}$일 때 그중 하나가 $y(1) = 0$을 만족하는가?

숨은 수학

최속강하선과 한 분야의 탄생

1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli)는 유럽의 수학자들에게 도전 과제를 냈다. 구슬이 한 점에서 다른 점으로 가장 짧은 시간에 미끄러져 내려가는 곡선을 찾으라는 것이었다. 뉴턴(Newton)(익명으로, 하룻밤 만에 풀었다. 베르누이는 "발톱을 보고 사자를 알아보았다"고 말했다), 라이프니츠(Leibniz), 로피탈(l'Hôpital), 야코프 베르누이(Jakob Bernoulli)가 해답을 보내왔다. 답은 사이클로이드(cycloid)이다. 1750년대에 오일러(Euler)와 젊은 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 이러한 개별적인 요령을 일반적인 방법으로 바꾸어 놓았다. y가 $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$를 정류(stationary)하게 만들면, y는 **오일러–라그랑주 방정식**(Euler–Lagrange equation)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

을 만족한다. 우리의 J에서는 $F = (y')^2 - a^2y^2$이고, 오일러–라그랑주 방정식은 $y'' + a^2y = 0$, 즉 단진동(simple harmonic motion)이다.

왜 $\pi/2$인가?

$a < \frac{\pi}{2}$이면 J의 최솟값은 0이고, 이 값은 $y \equiv 0$일 때만 얻어진다. $a = \frac{\pi}{2}$에서도 최솟값은 여전히 0이지만 이를 달성하는 두 번째 함수가 생긴다. $a > \frac{\pi}{2}$이면 같은 함수 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$가

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

을 주고, y를 크게 확대하면 J를 원하는 만큼 작은 음수로 만들 수 있다. 즉 최솟값이 아예 없다(그림 4.7.1). 임계값은 $y'' + a^2 y = 0$이 경계 조건(boundary conditions)($y(1) = 0$, 그리고 자유로운 끝에서의 "자연" 조건 $y'(0) = 0$)을 만족하는 0이 아닌 해를 가지는 첫 번째 a이다. 이것은 **고유값 문제**(eigenvalue problem)이고, $a^2 = \frac{\pi^2}{4}$는 그 가장 작은 고유값이다. Section 3.7와 비교해 보자. 그곳에서는 길이 π인 구간의 양 끝에서 함수를 고정하여 임계값 1을 얻었다. 여기서는 구간의 길이가 1이고 한쪽 끝만 고정되어 있는데, 이는 길이 2인 구간의 절반과 같으므로 임계값 a는 $\frac{\pi}{2}$이다.

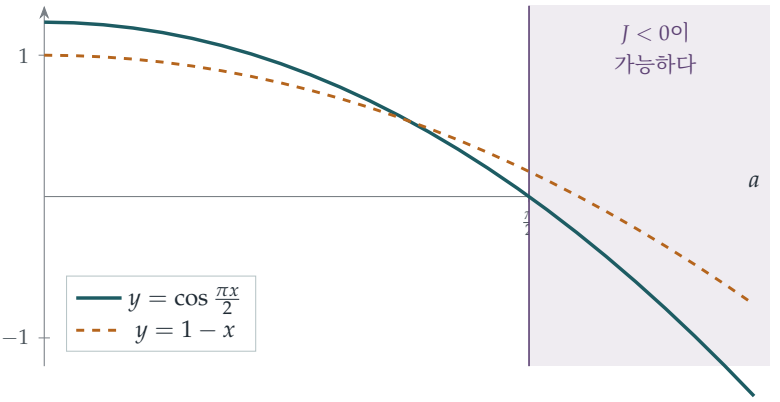

그림 4.7.1 $y(1) = 0$을 만족하는 두 시험 함수에 대하여 a에 따른 J의 값. $y = 1 - x$이면 $J = 1 - \frac{a^2}{3}$은 $a > \sqrt{3}$일 때에만 음수가 된다. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$이면 $J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$는 $a > \frac{\pi}{2}$가 되자마자 음수가 되며, 이보다 나은 함수는 없다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 모든 y에 대해 $J \geq 0$이다.

물리학과 최소 작용의 원리

변분법은 자연 그 자체를 기술한다는 것이 밝혀졌다. 18세기와 19세기에 걸쳐 운동 법칙을 다음과 같이 서술할 수 있다는 사실이 드러났다. 역학계는 **작용**(action)이라 불리는 적분을 정류하게 만드는 방식으로 움직인다. 마찬가지로 빛은 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 따라 진행하며(페르마(Fermat)의 원리), 이것으로 굴절(refraction)이 설명된다. 20세기에는 리처드 파인만(Richard Feynman)의 "경로 합(sum over paths)"을 통해 같은 아이디어가 양자역학(quantum mechanics)의 토대가 되었다. 이 문제의 이차 적분은 그 가장 단순한 예이며, 이 적분이 이끄는 고유값 문제는 Section 8.6에서 양자 진동자의 에너지 준위로 다시 등장한다.

더 도전하기

1 **임계값 너머.** $a > \frac{\pi}{2}$이면 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$가 $J < 0$을 줌을 보여라.

2 **오일러–라그랑주 방정식.** 심화 $y(1) = 0$을 만족하는 함수들 가운데 y가 J를 최소로 만든다고 하자. $\eta(1) = 0$을 만족하는 임의의 함수 η와 임의의 수 ε에 대하여 $J(y + \varepsilon\eta) \geq J(y)$이다. $J(y + \varepsilon\eta)$를 ε의 거듭제곱으로 전개하여 $\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$임을 유도하여라. 부분적분(integration by parts)을 이용하여 $y'' + a^2 y = 0$이고 $y'(0) = 0$임을 보여라(y가 충분히 매끄럽다고 가정한다).

3 **더 긴 구간.** 치환(substitution)을 이용하여, $y(L) = 0$일 때 모든 y에 대해 $\int_0^L ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x \geq 0$인 것은 정확히 $a \leq \frac{\pi}{2L}$일 때이고, 0이 아닌 y가 등호를 주는 것은 $a = \frac{\pi}{2L}$일 때뿐임을 보여라.

4 **사이클로이드.** 최속강하선(brachistochrone) 문제를 찾아보고 사이클로이드의 매개변수 방정식을 구하여라. 거꾸로 뒤집힌 사이클로이드 위의 어느 곳에서든 정지 상태로 놓은 구슬이 같은 시간에 바닥에 도달함을 보여라(**등시곡선**(tautochrone) 성질로, 1659년 하위헌스(Huygens)가 발견하였다).

더 읽을거리

- **Paul Nahin, *When Least Is Best*** (Princeton University Press). 최속강하선을 포함한 최적화의 역사와 수학을 학생들을 위해 쓴 책이다.
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*,** Volume II, Chapter 19 (“The principle of least action”). 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations*** (Springer). 학부 교재로, 앞부분의 장들은 A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수준의 미적분만 있으면 읽을 수 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.7절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/variations.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com