4.6 공식으로 나타낼 수 없는 적분

학습지

문제

STEP III 2016, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q3

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + C$이면 P와 Q는 어떤 등식을 만족해야 하는가? (우변을 미분해 보자.)

1단계 인수 $x+1$

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x$를 미분(differentiate)하여 $\mathrm{f}(x)e^x$와 같다고 놓는다. 분모를 없애서 다항식(polynomial) 사이의 항등식(identity)을 얻는다.

잠깐, 직접 해 보기 그 항등식에 $x=-1$을 대입한다. $\mathrm{Q}(-1)$에 대해 무엇이 성립해야 하는가?

2단계 차수

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 P와 Q의 차수(degree)를 각각 p, q라 하자. $\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}$에서 차수가 가장 높은 항은 무엇인가? 양변의 차수를 비교한다.

3단계 P 구하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\mathrm{Q} = x + 1$이면 P는 이차식이다. $\mathrm{P} = ax^2 + bx + c$로 놓고 대입한 다음 계수를 비교한다.

4단계 불가능성

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $f(x) = \frac{1}{x+1}$에 대한 항등식을 쓴다. 소문항 (i)에서처럼 $Q(-1) = 0$임을 보인다.

잠깐, 직접 해 보기 $k \geq 1$이고 $R(-1) \neq 0$인 $Q = (x+1)^k R$로 놓는다. 대입하여 $x+1$ 인수를 가능한 한 많이 약분한 뒤 $x = -1$을 대입한다. $P(-1)$에 대해 무엇을 알 수 있는가?

숨은 수학

극과 로그

소문항 (ii) 뒤에는 간단한 그림이 숨어 있다. 피적분함수(integrand) $\frac{e^x}{x+1}$은 $x = -1$에서 **단순극**(simple pole)을 가진다. 즉, 그 근처에서 $\frac{e^{-1}}{x+1}$처럼 행동한다. $\frac{1}{x+1}$을 적분하면 $\ln|x+1|$이 되므로, 원시함수(antiderivative)는 -1 근처에서 $e^{-1}\ln|x+1|$처럼 행동하여 로그적으로 $-\infty$로 발산해야 한다(그림 4.6.1). 그러나 유리함수와 e^x의 곱은 $(x+1)^{-k}$ 같은 거듭제곱처럼만 발산할 수 있고, 그러면 그 도함수는 $k+1 \geq 2$차의 극을 가지므로

결코 단순극이 될 수 없다. 로그적인 행동은 유리함수로 만들어 낼 수 없다. 4단계의 대수적 논증은 이 관찰을 엄밀하게 만든 것이다. 반면 소문항 (i)에서는 피적분함수가 **이중극**(double pole)을 가지는데, 이는 단순극을 가진 함수의 도함수가 정확히 보여 주는 모습이므로 유리함수 꼴의 답이 가능했다.

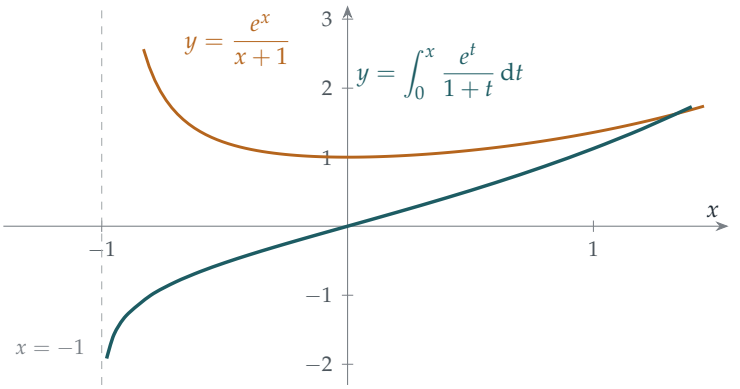

그림 4.6.1 피적분함수 $\frac{e^x}{x+1}$(호박색)은 $x = -1$에서 단순극을 가진다. 그 원시함수(청록색, 수치적으로 계산)는 문제없이 존재하지만, $x \to -1^+$일 때 $e^{-1}\ln(x+1)$처럼 **로그적으로** $-\infty$로 발산한다. 유리함수와 e^x의 곱은 결코 이렇게 행동할 수 없다.

리우빌과 리시 알고리즘

1830년대에 리우빌(Joseph Liouville)은 어떤 적분이 **초등함수**(elementary functions, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 거듭제곱근, 삼각함수로부터 일반적인 연산을 통해 만든 함수)로 표현될 수 있는지에 관한 이론을 세웠다. 그의 결과 중 하나에 따르면, f와 g가 유리함수이고 g가 상수가 아닐 때 $\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,dx$가 초등함수가 되는 것은 어떤 유리함수 R에 대해 이 적분이 $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$(에 상수를 더한 것)와 같을 때뿐이다. (g에 대한 조건은 중요하다. $\mathrm{g} = 0$이고 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}$이면 적분은 $\ln|x|$인데, 이는 초등함수이지만 유리함수는 아니다.) 따라서 유리함수 꼴을 배제하는 이 문제는 사실 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$가 아예 초등함수가 아님을 증명한다. 같은 정리의 여러 변형을 이용하면 $\int e^{-x^2}\,dx$와 $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$도 초등함수가 아님을 보일 수 있다. 1969년에 Robert Risch는 리우빌의 아이디어를 알고리즘으로 바꾸었는데, 이 알고리즘은 넓은 부류의 함수에 대해 초등함수인 적분이 존재하는지 판정하고, 존재한다면 그것을 찾아낸다. 이 알고리즘의 여러 변형이 컴퓨터 대수 시스템(computer algebra system) 안에서 작동하고 있다.

특수함수

어떤 적분이 초등함수 꼴을 갖지 않으면, 수학자들은 그 적분에 이름을 붙이고 새로운 함수로서 연구한다. Section 3.9에서 람베르트(Lambert) W 함수를 다룬 것과 마찬가지이다. 여기서 다룬 적분은 본질적으로 **지수적분**(exponential integral) $\mathrm{Ei}(x)$이다. 이 함수는 열의 흐름에 나타나며, **로그적분**(logarithmic integral) $\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$에도 나타난다. 로그적분은 x 이하의 소수(prime)의 개수에 대한 가장 좋은 간단한 근삿값이다(Section 1.2). $x < 0$이면 지수적분은 $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$이다. $x > 0$이면 이 적분은 $t = 0$에서의 무한히 치솟는 부분을 지나가므로, 그 주위의 작은 구간 $(-\varepsilon, \varepsilon)$을 잘라 내고 $\varepsilon \to 0$으로 보내어 $\mathrm{Ei}(x)$를 정의한다. 이것이 **코시 주요값**(Cauchy principal value)이다.

더 도전하기

1 **성공하는 두 경우.** $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$이고 $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x-1}{x+1}\,e^x + C$임을 보여라.

2 **가우스 함수.** $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$를 만족하는 다항식 P가 존재하지 않음을 보여라. (힌트: 미분한 다음 차수를 비교하라.)

3 **또 다른 극.** 소문항 (ii)의 논증을 변형하여 $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$가 $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ 꼴이 아님을 보여라.

4 **언제 가능한가?** f가 다항식이고, 어떤 다항식 P에 대해 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}\,e^x\,dx = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}\,e^x + C$라고 하자. $(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$임을 보이고, 이 식과 그 도함수에 $x = -1$을 대입하여 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$임을 보여라. 이 조건이 $\mathrm{f}(x) = x^3 - 2$와 연습문제 1의 예들에서 성립하는지 확인하라. 심화 이 조건이 충분조건이기도 함을 보일 수 있는가?

더 읽을거리

- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**. 리우빌의 정리를 예와 함께 설명하는, 무료로 볼 수 있는 강의 노트이다.
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, "An invitation to integration in finite terms"**, *The College Mathematics Journal* 25 (1994). 리우빌 이론에 대한 친절한 입문이다.
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I*** (Springer). 컴퓨터 대수 시스템이 실제로 어떻게 적분하는지 다룬다. 고급 수준이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.6절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/no-formula.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com