4.5 2학년생의 꿈

학습지

문제

STEP III 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q8

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 함수 x^x는 $x = 0$에서 여러분이 아는 어떤 식으로도 정의되지 않는다(0^0은 모호하다). x가 위쪽에서 0에 다가갈 때 이 함수는 어떻게 움직이는가? 계산기로 $x = 0.1, 0.01, 0.001$을 넣어 보아라.

1단계 거듭제곱은 로그를 이긴다

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $x \to 0^+$일 때 $\ln x \to -\infty$이다. 어떤 치환(substitution)을 하면 $x \to 0^+$이 $t \to \infty$로 바뀌고, $x^m (\ln x)^n$이 $e^{-mt} t^n$과 비슷한 꼴로 바뀌는가?

잠깐, 직접 해 보기 x^x에 대해서는 $x^x = e^{x \ln x}$로 쓰고, $m = n = 1$일 때의 첫 번째 결과를 이용한다.

2단계 점화식

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 I_{n+1}을 부분적분(integration by parts)한다. 어느 인수를 적분해야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 경계항(boundary term)은 $x = 1$에서 어떻게 되고, $x \to 0$일 때는 어떻게 되는가? (소문항 (i)을 이용한다.) 그다음 I_0에서 시작하여 점화식(reduction formula)을 거듭 적용한다.

3단계 급수

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 e^y의 급수(series)를 이용하여 $x^x = e^{x \ln x}$를 전개한다. 각 항은 어떤 꼴인가?

잠깐, 직접 해 보기 $m = n$으로 두고 소문항 (ii)를 이용하여, 0부터 1까지 항별로 적분(term-by-term integration)한다.

숨은 수학

합과 적분의 순서 바꾸기

3단계에서는 무한합과 적분의 순서를 슬그머니 바꾸었다. 즉 $\int \sum = \sum \int$로 두었다. 이것이 언제나 허용되는 것은 아니다. 대학에서는 이것이 성립하지 않는 예와, 언제 안전한지 알려 주는 정리들을 만나게 된다. 가장 간단한 정리에 따르면, 급수가 **균등수렴**(uniform convergence)할 때, 곧 급수의 꼬리를 모든 x에서 동시에 작게 만들 수 있을 때 순서를 바꾸어도 안전하다. 여기서는 $(0, 1]$에서 $|x \ln x| \le \frac{1}{e}$이므로, x가 무엇이든 n번째 항의 크기는 많아야 $\frac{e^{-n}}{n!}$이다. 이 상계들의 합은 수렴하므로 꼬리는 균등하게 작고, 순서를 바꾸는 것

이 정당화된다. 이 논증을 **바이어슈트라스 M-판정법**(Weierstrass M-test)이라고 하며, 해석학에서 가장 많이 쓰이는 도구 가운데 하나이다.

"꿈"이 이루어지는 이유

이 항등식은 특별하다. 이는 $\frac{(x\ln x)^n}{n!}$의 거듭제곱과 적분 $\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$이 정확히 맞아떨어져 $n!$이 완벽하게 약분되는 데 달려 있다. 그 밑바탕에서 이 적분은 감마 함수(Gamma function)가 모습을 바꾼 것이다. 치환 $x = e^{-t/(n+1)}$을 하면 이 적분은 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$이 되어, Section 4.4와 연결된다.

이름

"2학년생의 꿈"이라는 이름은 Jonathan Borwein과 공저자들이 2004년 책 *Experimentation in Mathematics*에서 "신입생의 꿈" $(a+b)^n = a^n + b^n$의 짝으로 붙인 것이다(신기하게도 "신입생의 꿈"은 어떤 수 체계에서는 참이다. 소수(prime) p를 법으로 하는 산술에서는 가운데 이항계수(binomial coefficient)가 모두 p로 나누어떨어지므로 $(a+b)^p = a^p + b^p$이다). Borwein은 **실험수학**(experimental mathematics)의 선구자였다. 실험수학에서는 컴퓨터를 이용해 이와 같은 항등식을 발견하고, 그런 다음 손으로 증명한다.

더 도전하기

1 **짝이 되는 등식.** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} \approx 1.2913$임을 보여라.

2 **최솟값.** x^x가 $(0,\infty)$에서 $x = \frac{1}{e}$일 때 최솟값 $e^{-1/e}$를 가짐을 보여라.

3 **몇 개의 항이 필요한가?** 항이 감소하는 교대급수(alternating series)에서는 중간에 멈추었을 때의 오차가 처음으로 생략한 항보다 작다. 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하게 구하려면 $\int_0^1 x^x\,dx$의 급수에서 몇 개의 항이 필요한가?

4 **사촌 격인 문제.** 같은 방법으로 $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,dx = -\frac{1}{9}$이고 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$임을 보여라. (Section 2.4에 의해 이 값은 $-\frac{\pi^2}{6}$이다.)

더 읽을거리

► **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics*** (A. K. Peters). 이 이름의 출처이며, 컴퓨터로 발견한 더 많은 항등식이 실려 있다.

- **William Dunham, *The Calculus Gallery*** (Princeton University Press). 뉴턴(Newton)부터 르베그(Lebesgue)까지 해석학의 걸작들을 다루며, 베르누이의 업적도 포함되어 있다.
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave). 균등수렴과, 합과 적분의 순서를 언제 바꿀 수 있는지를 명료하게 설명한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/sophomores-dream.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com