4.4 월리스, 베타 함수, 그리고 1/2의 계승

학습지

문제

STEP II 1995, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 u_0과 u_1은 얼마인가? 그리고 n이 클 때 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin^n t$의 그래프는 대략 어떤 모양인가?

1단계 점화식

다루는 내용: 점화식

생각해 보기 $\sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t$로 쓰고 부분적분(integration by parts)을 한다. 이때 $\sin t$는 적분하고 $\sin^{n-1} t$는 미분한다.

잠깐, 직접 해 보기 새로 생긴 피적분함수(integrand)에는 $\cos^2 t$가 들어 있다. 이것을 $1 - \sin^2 t$로 바꾸면 다시 u_n과 u_{n-2}로 돌아온다. 그다음 양변에 u_{n-1}을 곱한다.

2단계 불변량

다루는 내용: $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$

> **잠깐, 직접 해 보기** 이 관계식은 n이 하나 줄어도 $nu_n u_{n-1}$의 값이 변하지 않는다는 뜻이다. $n = 1$일 때 그 값은 얼마인가? u_0과 u_1을 계산해 본다.

3단계 조이기

다루는 내용: 그림, 부등식, 그리고 극한

생각해 보기 $0 < t < \frac{\pi}{2}$에서 $\sin^n t$와 $\sin^{n-1} t$의 크기를 비교하면 어떠한가? 이로부터 u_n과 u_{n-1}에 대해 무엇을 알 수 있는가?

잠깐, 직접 해 보기 $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$에 $u_n < u_{n-1}$을 두 가지 방식으로 적용하여 nu_n^2을 위아래에서 조인다(squeeze). 그다음 두 부등식 중 하나에 n 대신 $n+1$을 대입한다.

숨은 수학

월리스의 곱

축소 공식을 u_0 또는 u_1까지 내려가며 적용하면 명시적인 값을 얻는다.

$$u_{2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}.$$

조임을 이용하면 $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$임을 보일 수 있다. 이 비를 풀어 쓰고 정리하면 월리스

의 곱

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

을 얻는다. 존 월리스는 1655년에 대담한 보간(interpolation) 과정을 통해 이 공식을 찾아냈다. 지수가 자연수인 적분들의 표에 $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$를 끼워 넣어, 그 값이 "마땅히" 무엇이어야 하는지 추측한 것이다. 이것은 비에트(Viète)의 곱(Section 2.5)에 이어 수학에 등장한 최초의 무한곱 가운데 하나였고, 유리수만을 사용한 것으로는 최초였다.

반의 계승

월리스의 보간 아이디어는 1729년 오일러(Euler)에 의해 엄밀해졌다. 오일러는 오늘날 **감마 함수**(*Gamma function*)라고 부르는 함수

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

를 찾아냈는데, 이 함수는 $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$(부분적분하면 된다)를 만족하고 자연수 n에 대하여 $\Gamma(n+1) = n!$이다. 감마 함수는 계승(factorial)을 모든 양의 실수로 매끄럽게 확장한다. 이와 밀접하게 관련된 **베타 함수**(*Beta function*)

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

는 Section 4.3와 Section 2.9의 적분들을 포함하며, $x = \sin^2 t$로 치환하면 우리의 u_n도 포함한다. 특히 $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$(연습문제 2)이므로 $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다. 이는 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$와 같은 말이며, 유명한 가우스 적분(Gaussian integral) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$와 같은 사실이다. 정규분포(normal distribution)의 공식에 π가 나타나는 이유가 바로 이것이다.

스털링 공식

스털링 공식에 따르면 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$이다. $(n/e)^n$ 부분은 비교적 쉽게 얻을 수 있지만 상수 $\sqrt{2\pi}$는 더 어렵다. 이 상수를 구하는 표준적인 방법이 바로 이 문제이다. u_{2m}의 명시적인 값에는 $(2m)!/(m!)^2$이 들어 있고, 극한 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$가 상수를 정확히 결정한다. 확률을 통해 같은 상수에 이르는 전혀 다른 길은 Section 12.23에 있다.

더 도전하기

1 **월리스의 곱.** u_{2m}과 u_{2m+1}의 명시적인 값과 $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$을 이용하여 월리스의 곱을 증명하라.

2 **베타 적분.** STEP II 2013, 2번 문제 (step.maths.org/questions/13-s2-q2)에 도전해 보라. 이 문제는 축소 공식으로 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$를 계산한 뒤, $n=\frac{1}{2}$일 때 그 답이 무엇을 시사하는지 묻는다. 반의 계승을 처음 엿보는 셈이다.

3 **베타 함수.** STEP III 2025, 1번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip)에 도전해 보라. 이 문제는 일반적인 베타 적분 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$와 그 대칭성 및 점화식을 전개하고, 이를 이용하여 $[0,\infty)$에서의 적분을 계산한다.

4 **중심 이항계수(central binomial coefficients).** 심화 $u_{2m}=\binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$임을 보이고, $nu_n^2\to\frac{\pi}{2}$를 이용하여 m이 클 때 $\binom{2m}{m}\approx\dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$임을 유도하라. $m=10$일 때 이를 확인하라.

더 읽을거리

- **Julian Havil, *Gamma*** (Princeton University Press). 감마 함수와 그 역사를 다룬다.
- **Philip J. Davis, “Leonhard Euler’s integral: a historical profile of the Gamma function”**, *American Mathematical Monthly* 66 (1959). 상을 받은 고전적인 논문으로, 이 절을 공부했다면 읽을 수 있다.
- **Emil Artin, *The Gamma Function*** (Dover). 해석학을 어느 정도 공부한 뒤에 읽기 좋은, 짧고 아름다운 단행본이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.4절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/wallis-beta.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com