4.3 22/7은 π보다 크다

학습지

문제

STEP I 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 왜 $\int_0^1 \frac{\text{다항식}}{1+x^2}\,dx$에서 π가 나오는가? 이런 꼴의 간단한 적분 가운데 그 자체로 π를 주는 것은 무엇인가?

1단계 다항식의 나눗셈

다루는 내용: x^2+1로 나누기

생각해 보기 먼저 $x^4(1-x)^4$을 전개한다.

잠깐, 직접 해 보기 긴 나눗셈(long division)을 하거나 최고차항부터 계수를 비교(comparing coefficients)하여 x^2+1로 나눈다. 나머지(remainder)는 무엇인가?

2단계 적분

다루는 내용: $\frac{22}{7} - \pi$와 같은 적분

생각해 보기 앞에서 얻은 항등식(identity)의 양변을 $1 + x^2$으로 나누고 0부터 1까지 각 항을 적분한다. 어느 적분에서 π가 나오는가?

3단계 적분값의 범위 구하기

다루는 내용: π의 범위

생각해 보기 피적분함수(integrand)는 $(0,1)$에서 양수이다. 이로부터 바로 알 수 있는 것은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 $[0,1]$에서 $\frac{1}{1+x^2}$의 최댓값과 최솟값은 얼마인가? 이를 이용하여 적분값의 범위를 구하고, $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$의 값을 계산한다.

숨은 수학

역사가 있는 증명

아르키메데스(Archimedes)는 기원전 250년 무렵, 원에 내접하고 외접하는 96각형의 둘레를 계산하여 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$을 증명하였다(Section 2.5의 다각형과 비교해 보라). 적분을 이용한 증명은 훨씬 최근의 것이다. 이 증명은 D. P. Dalzell이 1944년에 발표하였고, 1968년 미국 대학생들을 위한 퍼트넘 대회(Putnam competition)에 문제로 출제되면서 유명해졌다. 이 증명의 매력은 수치 계산이 전혀 필요 없다는 점이다. 부등식 $\frac{22}{7} > \pi$는 양의 함수의 적분은 양수라는 사실에서 저절로 나온다.

같은 아이디어로 얻는 더 나은 근삿값

이 방법은 일반화된다. $x^4(1-x)^4$ 대신 $x^8(1-x)^8$을 쓰면 같은 나눗셈으로

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

를 얻고, 이로써 $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$가 증명되는데, 이는 유효숫자(significant figures) 여섯 자리까지 정확하다. 2009년에 Stephen Lucas는 피적분함수가 음이 아닌 이런 종류의 적분들의 족을 찾아내어, 유효숫자 일곱 자리까지 정확한 $\frac{355}{113}$을 비롯한 다른 유명한 근삿값들에 대한 부등식을 증명하였다.

근삿값과 무리성

왜 π는 $\frac{22}{7}$이나 $\frac{355}{113}$처럼 좋은 분수 근삿값을 가질까? 모든 무리수(irrational number)는 그 수와의 차가 $\frac{1}{q^2}$ 이내인 분수 $\frac{p}{q}$를 무한히 많이 가지는데, π는 연분수(continued fraction) $[3;7,15,1,292,\ldots]$에 큰 항 292가 들어 있어서 앞부분에 유난히 좋은 근삿값을 몇 개 가지게 된다(Section 2.2 참고). 이 문제에 나온 것과 같은 적분을 점점 더 작게 만드는 것은, 어떤 수가 분수로 너무 잘 근사될 수 **없으며** 따라서 무리수임을 보이는 증명의 출발점이 된다. π가 무리수라는 Ivan Niven의 유명한 한 쪽짜리 증명(1947)은 $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$의 적분을 이용하는데, 이는 Section 2.9에 나온 적분들의 삼각함수 사촌이다.

더 도전하기

1 **수치를 확인하라.** $\frac{22}{7} - \pi$를 유효숫자 네 자리까지 계산하고, 그 값이 $\frac{1}{1260}$과 $\frac{1}{630}$ 사이에 있음을 확인하라.

2 **베타 적분.** 공식 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$(Section 4.4에서 증명함)을 이용하여 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$임을 확인하라.

3 **아래쪽 근삿값.** 다음을 보여라.

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{그리고} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

이로부터 $\pi > 3$과 $\pi > \frac{47}{15}$을 이끌어 내라. 왜 이것들은 $\frac{22}{7}$보다 덜 정확한가?

4 **더 나아가기.** 심화 위에 주어진 $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$에 대한 항등식을 확인하라. (나눗셈은 컴퓨터 대수 시스템(computer algebra system)이 해 줄 것이다. 핵심은 나머지가 16이어서 4π가 나온다는 것을 확인하는 데 있다.)

더 읽을거리

- **Petr Beckmann, *A History of* π** (St Martin's Press). π의 역사. 아르키메데스의 다각형 방법을 자세히 다루며, 그 밖에도 많은 내용이 담겨 있다.
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009). 음이 아닌 피적분함수를 가진 적분에서 얻은 π의 근삿값. 짧고 읽기 쉽다.
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 무리수. π가 무리수라는 Niven의 증명이 실려 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/twenty-two-sevenths.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com