4.2 적분으로 삼각함수 세우기

학습지

문제

STEP III 2017, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 소문항 (i)과 (ii)는 각각 어떤 삼각함수 항등식에 대응하는가? ($\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, 그리고 $\tan(A+B)$의 공식을 떠올려 보라.)

1단계 **반사(reflection)** $u \mapsto 1/u$

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{T}(x)$에서 $u = 1/w$로 치환(substitution)하라. 피적분함수(integrand)와 적분 구간의 끝(limits)은 각각 어떻게 되는가?

2단계 덧셈 치환

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 몫의 미분법(quotient rule)으로 $v = \frac{u+a}{1-au}$를 미분하라. 그다음 $1+v^2$을 하나의 분수로 나타내어 비교하라.

잠깐, 직접 해 보기 따라서 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$이다. 즉 이 치환은 피적분함수를 바꾸지 않는다. 그렇다면 $\mathrm{T}(x)$의 적분 구간의 끝은 어떻게 바뀌는가?

3단계 두 가지 항등식(identity) 더

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 소문항 (i)을 두 번 사용하여 $\mathrm{T}(x)$와 $\mathrm{T}(a)$를 바꾸어 써라. 그다음 $y = 1/x, b = 1/a$로 놓아 문자를 바꾸어라. 조건 $x < 1/a$는 어떻게 바뀌는가?

4단계 특수한 값

다루는 내용: 소문항 (iii)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{T}(\sqrt{3})$의 경우: 마지막 항등식에서 $\frac{y+b}{by-1}$이 y 자신과 같아지도록 y와 b를 골라라.

생각해 보기 $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)$의 경우: $x = a = \sqrt{2}-1$로 놓고 덧셈 항등식을 사용하라. $\frac{2x}{1-x^2}$의 값은 무엇인가? 또 소문항 (i)에서 $\mathrm{T}(1)$에 대해 무엇을 얻을 수 있는가?

숨은 수학

초등함수 세우기

엄밀한 해석학 강의에서는 exp, sin, cos, ln 같은 함수를 그냥 주어진 것으로 가정할 수 없다. 이 함수들을 구성하고 그 성질을 증명해야 한다. 표준적인 방법은 세 가지이다. 거듭제곱급수(power series)로 정의할 수 있다($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$). 연습문제에 있는 1986년 예시 문제(specimen question)처럼 미분방정식(differential equation)의 해로 정의할 수도 있다($\mathrm{f}' = \mathrm{f}$, $\mathrm{f}(0) = 1$이 exp를 정의한다). 또는 여기서처럼 역함수(inverse

function)를 적분으로 정의할 수 있다. 즉 $\ln x = \int_1^x \frac{du}{u}$, $\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$로 정의하고, $\pi = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$로 정의한다. 각 방법에는 저마다 장점이 있으며, 세 방법이 모두 같은 함수를 준다는 것을 증명하는 일은 보람 있는 연습이다. Section 3.8의 함수방정식(functional equation)을 이용한 방법과도 비교해 보라.

원 너머로: 타원적분

적분을 이용한 방법은 삼각형을 이용한 방법으로는 불가능한 방식으로 일반화된다. 1718년 Giulio Fagnano는 8자 모양의 곡선인 **렘니스케이트**(lemniscate)의 호의 길이(arc length)를 연구했는데, 이는 $\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$으로 이어진다. 그는 우리의 치환이 T를 두 배로 만든 것처럼 호를 두 배로 만드는 치환을 찾아냈다. 1751년 Fagnano의 연구를 읽은 오일러(Euler)는 완전한 덧셈정리를 찾았고, 이는 결국 아벨(Abel)과 야코비(Jacobi)를 거쳐 **타원함수**(elliptic function)의 이론으로 이어졌다. 타원함수란 이와 같은 적분의 역함수로, 원에 대한 sin과 cos의 역할을 렘니스케이트에 대해 하는 함수이다. 같은 적분을 산술기하평균(AGM)에 관한 가우스(Gauss)의 연구에서도 만난 바 있다(Section 2.6). 오늘날 타원함수는 정수론(number theory)의 중심에 있으며, Section 1.9의 타원곡선(elliptic curve)은 그 기하학적 그림자이다.

π 계산하기

덧셈 항등식은 π를 계산하는 가장 유명한 공식들의 바탕이기도 하다. 예를 들어 이를 거듭 적용하면 $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$임을 보일 수 있는데, 이것이 1706년의 마친(Machin)의 공식이다. 이 공식을 급수 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$와 결합하여 π의 100자리를 얻었고, 이 방법은 두 세기 반 동안 으뜸가는 방법으로 쓰였다. 이것이 Section 5.1의 주제이다.

더 도전하기

---

1 **지수함수와 코사인.** STEP II Specimen paper, 6번 문제 (step.maths.org/questions/spec-s2-q6)를 풀어 보라. 이 문제는 지수함수와 코사인의 덧셈정리를 오직 그 미분방정식만으로 이끌어 낸다. (**힌트**: 코사인의 경우, 0이 되어야 할 두 식을 찾고 그 제곱의 합이 상수임을 보여라.)

2 **역사인 함수.** STEP III 2007, 7번 문제 (step.maths.org/questions/07-s3-q7)을 풀어 보라. 이 문제는 역사인 함수를 이 절의 적분과 같은 방식으로 다루고, 치환으로 둘을 연결한다.

3 **초기의 마친형 공식.** 덧셈 항등식을 이용하여 $\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$임을 보여라.

4 T_∞**는 유한하다.** 모든 $x \geq 1$에 대해 $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$임을 보이고, $0 < x < 1$에서도 $\mathrm{T}(x) < 2$인 이유를 설명한 다음, 단조수렴정리(monotone convergence theorem, Section 2.2)로부터 T_∞가 존재함을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Tom Körner,** ***Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press). 여러 방법을 논의하면서 초등함수를 엄밀하게 세운다.
- **Walter Rudin,** ***Principles of Mathematical Analysis*** (McGraw-Hill). 유명한 "베이비 루딘(baby Rudin)"이다. 8장의 머리말에서 몇 쪽 안 되는 우아한 서술로 거듭제곱급수에서 exp, sin, cos를 구성한다. 고급.
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev,** ***Elliptic Functions and Elliptic Integrals*** (American Mathematical Society). 렘니스케이트가 어디로 이어지는지 알고 싶은 독자를 위한 책이다. 고급.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.2절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/trig-from-integral.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com