4.1 적분이란 무엇인가?

학습지

문제

STEP III 1989, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s3-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 소문항 (iii)의 두 합은 폭이 $\frac{a}{n}$인 직사각형들의 넓이의 합이다. 증가함수(increasing function) f에 대하여, 어느 합이 곡선 아래 넓이보다 작게 어림한 값이고 어느 합이 크게 어림한 값인가?

1단계 서로 소거되는 합(telescoping sum)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 연속하는 여섯 정수(consecutive integers)의 곱 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$를 생각한다. $P(r) - P(r-1)$을 계산해 보아라. 두 곱에 공통으로 들어 있는 인수는 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 얻은 결과를 $r = 1$부터 n까지 더한다. 대부분의 항이 소거된다. 그런 다음 r^5과 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$를 비교한다.

2단계 하계(lower bound)

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 이번에는 r에서 끝나도록 **내려가는** 연속하는 정수의 곱 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$로 같은 일을 한다. $r=0$부터 $n-1$까지 더하고, 각 항을 r^5과 비교한다. 왜 등호가 성립하지 않는 엄격한 부등식(strict inequality)이 되는가?

3단계 **적분(integral)**

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 증가함수(increasing function)에 대하여, 두 합 중 어느 것이 넓이를 작게 어림한 값이고 어느 것이 크게 어림한 값인가?

잠깐, 직접 해 보기 $f(x) = x^5$에 대한 두 합을 모두 $\sum r^5$으로 나타내고, 소문항 (i)과 (ii)를 이용한다. $n \to \infty$일 때 두 경계는 각각 어떤 값으로 수렴(converge)하는가?

숨은 수학

리만의 정의

얇은 띠의 넓이를 더해 넓이를 구한다는 생각은 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라간다. 그는 기원전 250년경 바로 이 논증의 한 형태로 포물선(parabola) 아래의 넓이를 구했다. 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)는 적분을 미분의 역연산으로 바꾸어 놓았고, 그 후 150년 동안 대부분의 사람들은 적분을 그렇게 생각했다. 1854년 베른하르트 리만(Bernhard Riemann)은 오늘날에도 대학 강의가 출발점으로 삼는 정의를 내

놓았다. $[a,b]$를 작은 조각들로 나누고, (폭) $\times$ (조각 안 어딘가에서의 f의 높이)의 합을 만든 다음, 조각이 작아질 때 그러한 합들이 모두 하나의 극한에 가까워지면 f가 적분가능(integrable)하다고 한다. 이 문제에서 다룬, 폭이 같은 띠와 왼쪽·오른쪽 끝점을 쓰는 형태는 증가함수에서 통하는 특수한 경우이다. 장가스통 다르부(Jean-Gaston Darboux)의 "상합과 하합"을 쓰면 일반적인 경우도 깔끔하게 다룰 수 있다.

모든 함수가 적분을 갖는 것은 아니다

정확한 정의가 있으면 어떤 함수가 적분가능한지 물을 수 있다. 닫힌구간(closed interval)에서 연속인 함수(continuous function)는 모두 적분가능하고, 증가함수도 모두 그렇다. 그러나 디리클레(Dirichlet) 함수를 생각해 보자. x가 유리수(rational)이면 $\mathrm{f}(x) = 1$이고, 무리수(irrational)이면 0이다. 아무리 얇은 띠에도 유리수와 무리수가 모두 들어 있으므로, 모든 상합은 1이고 모든 하합은 0이다. 둘은 결코 일치하지 않으므로 $\int_0^1 \mathrm{f}$는 리만의 의미로는 존재하지 않는다. 1902년 앙리 르베그(Henri Lebesgue)는 더 강력한 적분인 르베그 적분(Lebesgue integral)을 고안했다. 이 적분은 이 함수도 다룰 수 있고(이 함수의 르베그 적분은 0이다) 극한에 대해서도 훨씬 잘 작동한다. 르베그 적분은 현대 확률론(probability theory)의 기초이며, 여러분은 대학 2학년이나 3학년 때 이를 만나게 될 것이다.

이산 미적분학

1단계의 연쇄 소거는 모습을 바꾼 미적분학이다. "상승 계승(rising factorial)" $r(r+1)\cdots(r+k-1)$은 합에 대하여, x^k가 적분에 대하여 행동하는 것과 똑같이 행동한다. 이것을 더하면 인수의 개수가 하나 늘어나고 새로운 인수의 개수로 나누어지는데, 이는 $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$과 꼭 같다. 합과 적분, 차분과 도함수 사이의 이러한 평행 관계를 **유한 차분법**(calculus of finite differences)이라 하며, 이는 합을 계산하는 강력한 도구이다.

더 도전하기

1 **적분으로서의 극한.** STEP III 1999, 3번 문제 (step.maths.org/questions/99-s3-q3)에 도전해 보자. 이 문제는 합의 극한을 적분으로 바꾼다. 각 합에서 곡선 아래의 직사각형을 찾아보라.

2 **아르키메데스의 포물선.** $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$과 소문항 (iii)의 정의를 이용하여 $\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$임을 증명하라.

3 **상승 계승.** 모든 양의 정수 k에 대하여 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$임을 보여라.

4 정확한 합. 항등식 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$와 $k \le 4$인 $\sum r^k$에 대한 알려진 공식들을 이용하여 $\sum_{r=1}^{n} r^5$를 정확히 구하라.

더 읽을거리

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*** (Cambridge University Press). 리만 적분에서 르베그 적분에 이르는 이야기를, 각 단계를 불가피하게 만든 문제들을 통해 들려준다.
- **Michael Spivak, *Calculus*** (Cambridge University Press). 13장에서 이 절과 똑같이 상합과 하합으로 적분을 정의한다.
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley). 2장에서 상승계승과 하강 계승(falling factorial)을 사용하여 유한 차분법을 전개한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 4.1절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/riemann.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com