3.9 새로운 함수 만들기

학습지

문제

STEP II 2021, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** 방정식을 "푼다"는 것은 정확히 무슨 뜻일까? $x = \sqrt{2}$는 $x^2 = 2$의 해일까, 아니면 단지 그 해에 붙인 이름일까?

1단계 곡선 $y = xe^x$

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 xe^x를 미분(differentiate)한다. 정류점(stationary point)은 어디에 있고, 어떤 종류의 정류점인가?

생각해 보기 $x \to +\infty$일 때와 $x \to -\infty$일 때 xe^x는 어떻게 되는가? 곡선은 좌표축과 어디에서 만나는가?

2단계 역함수

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 역함수(inverse)가 존재하려면 f가 $[a, \infty)$에서 일대일(one-to-one)이어야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 a는 무엇인가? $y = x$에 대하여 대칭시켜 $y = g(x)$의 그래프를 그려 본다.

3단계 네 개의 방정식

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 정의하는 성질은 $g(z)\,e^{g(z)} = z$이다. 모든 소문항에서 (어떤 식) $e^{(\text{같은 식})}$ = (어떤 수)의 꼴을 목표로 한다. (a)에서는 양변에 e^x를 곱한다.

생각해 보기 (b)와 (c)에서는 미지수가 $x \ln x$의 꼴로 나타난다. 어떤 치환(substitution)을 하면 $x \ln x$가 ue^u 꼴의 식으로 바뀌는가?

잠깐, 직접 해 보기 ue^u의 최솟값을 기억한다. (c)에서 $ue^u = -\frac{1}{3}$의 해는 몇 개이고, g는 그중 어느 것을 주는가? (d)에서는 양변을 지수로 올리고, 지수에 x의 상수배가 나타나도록 한다.

4단계 $x^x = 10$

다루는 내용: 소문항 (iv)

? **생각해 보기** 양변에 로그를 취한 다음, (b)와 (c)에서와 같은 치환을 사용한다.

숨은 수학

오랜 역사와 최근의 이름을 가진 함수

요한 하인리히 람베르트(Johann Heinrich Lambert)는 1758년에 이런 꼴의 방정식을 연구하였고, 오일러(Euler)는 1783년에 이를 더 발전시켰다. 그러나 이 함수는 1990년대까지 표준적인 이름이 없었는데, 그때 컴퓨터 대수 시스템 Maple의 개발자들에게 이름이 필요해졌다. 1996년에 Robert Corless, Gaston Gonnet, David Hare, David Jeffrey, 그리고 도널드 커누스(Donald Knuth)는 이 함수의 성질과 응용을 정리한 논문 "On the Lambert W function"을 발표하였다. 이 논문은 수천 번 인용되었고, 이제 W는 대부분의 수학 소프트웨어에 내장되어 있다. 문제의 함수 g는 **주분지**(principal branch) W_0이다. 그림 3.9.1 (온라인 전체 절에 수록)의 점선 곡선은 (c)와 (d)에서 두 번째 근을 주었는데, 이것이 또 하나의 실수 분지 W_{-1}이다.

W가 나타나는 곳

- **빈의 변위 법칙(Wien's displacement law).** 뜨거운 물체가 가장 강하게 복사하는 파장은 그 물체의 온도에 반비례한다. 그 비례상수는 $5(1 - e^{-x}) = x$를 풀어서 얻는데, 이 방정식의 양의 해는 $x = 5 + W(-5e^{-5}) \approx 4.965$이다. 약 5800 K인 태양이 노르스름한 흰색으로 보이고, 더 차가운 적색 왜성이 붉게 보이는 까닭이 여기에 있다.

- **거듭제곱 탑.** 무한히 쌓은 탑 $x^{x^{x^{\cdots}}}$은 $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$일 때 수렴(converge)하고, 그 값은 $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$이다.

- **인구 모형과 전염병 모형.** 가장 단순한 모형에서 전염병의 최종 규모와, 몇몇 성장 모형에서 주어진 인구에 도달하는 데 걸리는 시간은 모두 W로 주어진다.

초등함수

W는 정말 새로운 함수일까, 아니면 exp, ln, 거듭제곱근, 삼각함수를 써서 나타낼 수 있을까? 이 함수는 진정으로 새로운 함수이다. 1830년대의 리우빌(Joseph Liouville)까지 거슬러 올라가는 정리에 따르면 W는 **초등함수**(elementary function)가 아니다. 같은 이론에 따르면 $\int e^{-x^2}\,dx$처럼 겉보기에 순진해 보이는 어떤 적분들은 초등함수로 계산할 수 없으며, 정규분포에 고유한 특수함수가 필요한 것도 이 때문이다.

더 도전하기

1 **2, 4, 그리고 하나 더.** 방정식 $x^2 = 2^x$는 자명한 해 $x = 2$와 $x = 4$를 가진다(Section 3.5와 비교해 보라). 이 방정식이 음의 해도 가지며, 그 해가

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\, g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767$$

임을 보여라.

2 **도함수.** $g(x)e^{g(x)} = x$를 음함수 미분(implicit differentiation)하여, $x \neq 0$일 때

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x\big(1 + g(x)\big)}$$

임을 보여라. $x = -\frac{1}{e}$에서는 어떤 일이 일어나는가?

3 **적분.** 치환 $x = we^w$를 이용하여 $\displaystyle\int_0^e g(x)\,dx = e - 1$임을 보여라.

4 **탑.** 탑 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$이 수렴한다고 가정하고, $T = \sqrt{2}^{\,T}$임을 보인 다음, $T = 2$ 또는 $T = 4$임을 이끌어 내어라. 어느 쪽일까? (수열 $t_1 = \sqrt{2}$, $t_{n+1} = \sqrt{2}^{\,t_n}$의 몇몇 항을 계산해 보고, Section 2.2의 거미줄 그림(cobweb diagram)을 생각해 보라.)

더 읽을거리

- **Robert Corless et al., "On the Lambert W function"**, *Advances in Computational Mathematics* 5 (1996). 이 함수에 이름을 붙인 논문이다. 이 절을 공부했다면 앞부분은 읽을 수 있다.
- **Brian Hayes, "Why W?"**, *American Scientist* 93 (2005). 이 함수의 역사와 쓰임새를 다룬 생동감 있는 에세이("왜 W인가?")이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.

- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**. 리우빌의 이론을 설명하는 강의 노트(초등 적분의 불가능성 정리)로, 온라인에서 볼 수 있다. 고급 수준이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.9절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/lambert-w.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com