3.8 덧셈 법칙으로 정해지는 함수

학습지

문제

STEP III 2019, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 이 방정식은 **모든** x와 y에 대해 성립한다. 가장 먼저 시도해 볼 만한 유용한 것은 무엇인가?

1단계 0에서의 값

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 이 등식은 모든 x와 y에 대하여 성립한다. $x = y = 0$을 대입하여라. $\mathrm{f}(0)$이 가질 수 있는 값은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{f}(0) = 0$이면 어떤 문제가 생기는가? $y = 0$을 대입하여라.

2단계 0에서의 도함수(derivative)로부터 모든 점에서의 도함수 구하기

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{f}'(x)$의 정의에서 $\mathrm{f}(x+h) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(h)$로 써라. 극한(limit) 밖으로 꺼낼 수 있는 것은 무엇이고, 남는 극한은 무엇인가?

3단계 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$ 풀기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\mathrm{f}(x)\,e^{-kx}$를 생각하여라. 그 도함수는 무엇인가?

4단계 두 번째 규칙

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 g에 대한 규칙에 $y = 0$을 대입하여라. 이것으로 $g(0)$에 대하여 무엇을 알 수 있는가? $|g(x)| < 1$이라는 조건은 어디에서 쓰이는가?

잠깐, 직접 해 보기 규칙을 이용하여 $g(x+h) - g(x)$를 하나의 분수로 나타내고, 간단히 한 다음, h로 나누고 $h \to 0$으로 보내어라.

5단계 풀기

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 변수를 분리하여라(separation of variables). $|g| < 1$일 때 도함수가 $\frac{1}{1-g^2}$인 함수는 무엇인가?

숨은 수학

상대성 이론에서의 속도

일상생활에서 기차가 속도 u로 움직이고 그 안에서 앞쪽으로 속도 v로 걸어가면, 지면에 대한 속도는 $u+v$이다. 아인슈타인은 1905년에 이것이 근사일 뿐임을 보였다. c를 빛의 속도라 할 때, 올바른 규칙은

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

이다. 속도를 c에 대한 비율로 나타내면, 이것은 정확히 g에 대한 규칙이다. 우리의 결과는 각 속도를 $v = \tanh\phi$로 쓰면, 속도의 합성이 ϕ 값들을 **더하는** 것이 된다는 뜻이다. 양 $\phi = \operatorname{artanh} v$를 **신속도**(*rapidity*)라고 한다. 로켓 엔진이 한 번 가속할 때마다 일정한 양의 신속도가 더해지지만, 모든 ϕ에 대해 $\tanh\phi < 1$이므로 속도는 빛의 속도에 점점 가까워질 뿐 결코 도달하지 못한다(그림 3.8.1). $0.9c$와 $0.9c$를 합성하면 $1.8c$가 아니라 $\frac{1.8}{1.81}c \approx 0.9945c$가 된다.

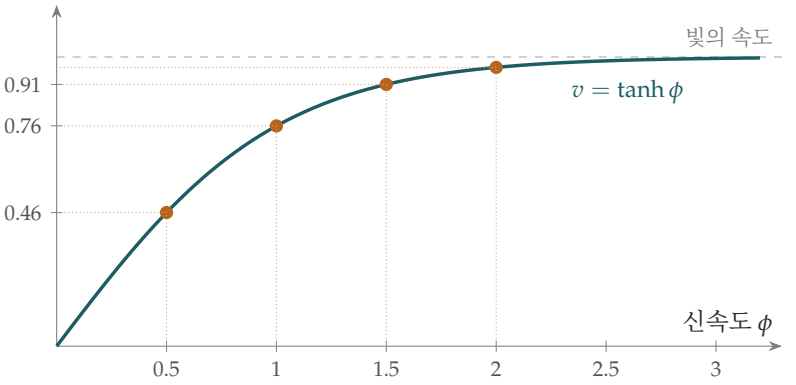

그림 3.8.1 신속도에 따른 속도(빛의 속도에 대한 비율). 엔진이 같은 가속을 할 때마다 주어지는 것처럼 신속도를 같은 간격으로 늘리면, 속도는 0.46, 0.76, 0.91, 0.96, ...으로 점점 적게 증가하며 결코 1에 도달하지 않는다.

코시의 함수방정식

가장 단순한 함수방정식은 $f(x+y) = f(x) + f(y)$로, 1821년에 코시(Cauchy)가 연구하였다. f가 미분가능하면 이 문제의 방법으로 $f(x) = kx$임을 보일 수 있다. 사실 연속성(continuity)만으로도 충분하다. 그러나 정칙성 가정이 전혀 없으면, 그래프가 평면 전체에 조밀하게 흩어져 있는 전혀 다른, 극도로 기괴한 해들이 존재한다. Georg Hamel이 1905년에 이러한 해를 구성하였는데, 그 구성에는 **선택공리**(*axiom of choice*)가 필요하며, 그 중 어느 것도 명시적으로 적어 낼 수 없다. 이 문제가 f가 미분가능하다고 굳이 못 박는 이유 중 하나가 이것이다. 이 가정은 형식적인 것이 아니다.

준동형사상

$f(x+y) = f(x)f(y)$는 f가 실수의 덧셈을 양의 실수의 곱셈으로 바꾸면서 두 구조를 모두 보존한다는 뜻이다. 대학 1학년 대수학의 언어로 말하면, f는 $(\mathbb{R}, +)$에서 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$로 가는 **군 준동형사상**(*group homomorphism*)이고, 로그는 그 역함수이다. 수학에서 가장 중요한 함수들 중 상당수가 이런 식으로, 즉 그것이 보존하는 구조로 특징지어진다. Section 7.6에서는 tanh의 기하학적 의미를 만나게 된다. tanh는 "쌍곡각"을 재며, 그 덧셈 법칙은 쌍곡 회전의 합성에서 나온다.

더 도전하기

1 **탄젠트 규칙.** g가 미분가능하고 $g'(0) = k \neq 0$이며, 양변이 정의될 때마다 $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$라고 하자. $g'(x) = k(1+g(x)^2)$임을 보이고, $x = 0$ 근처에서 $g(x) = \tan kx$임을 이끌어 내어라.

2 **코시의 방정식.** f가 미분가능하고 모든 x, y에 대해 $f(x+y) = f(x) + f(y)$이면 $f(x) = kx$임을 보여라.

3 **도함수 없이.** 심화 $f(x+y) = f(x)f(y)$이고 $f(1) = a > 0$이라는 것만 가정하자. 양의 정수 n에 대해 $f(n) = a^n$임을 보이고, 다음으로 $f(1/n) = a^{1/n}$임을, 그다음 모든 양의 유리수 q에 대해 $f(q) = a^q$임을 보여라. (더 나아가려면 왜 연속성이 필요한가?)

4 **로켓 과학.** 어떤 로켓은 분사할 때마다 현재 기준틀에 대해 속도를 $0.5c$만큼 높일 수 있다. 정지 상태에서 출발할 때, 2번, 3번, 4번 분사한 후의 (출발점에 대한) 속도는 얼마인가? 신속도를 이용하여라.

더 읽을거리

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them*** (Springer). 함수방정식과 그 풀이법. 문제 풀이를 즐기는 사람을 위한 읽기 쉬운 입문서이다.
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman). 시공간 물리학. 특수 상대성 이론의 고전적인 입문서로, 처음부터 끝까지 신속도를 사용한다.
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press). 야심 찬 이들을 위한 미적분. 지수함수와 삼각함수를 그 성질로부터 정의하며, 바로 이 절의 정신과 같다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/addition-laws.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com