3.7 $\pi^2 \leq 10$

학습지

문제

STEP II 2014, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q2

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $[0, \pi]$의 양 끝에서 0인 함수가 가운데에서 크다면 왜 가파를 수밖에 없을까? 조건 $f(0) = f(\pi) = 0$은 왜 중요할까?

1단계 사인파

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$와 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$를 이용하여 $\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx$와 $\int_0^{\pi} \cos^2 nx \, dx$를 계산한다.

2단계 양 끝 조건(end conditions)이 중요하다

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $f(0) \neq 0$이면서 $(*)$가 성립하지 않는 간단한 함수(function)를 찾는다. 그다음 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) \neq 0$인 함수를 찾는다.

3단계 포물선

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $x = 0$과 $x = \pi$에서 값이 0이 되는 이차식(quadratic)은 무엇인가? 상수배가 왜 상관없는가?

잠깐, 직접 해 보기 $f(x) = x(\pi - x)$에 대하여 두 적분(integral)을 모두 계산한다. 치환(substitution) $u = x - \frac{\pi}{2}$를 하면 두 피적분함수(integrand)가 모두 우함수(even function)가 된다.

4단계 삼각함수를 택하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $\mathrm{f}(0) = 0$과 $\mathrm{f}(\pi) = 0$은 p, q, r에 어떤 조건을 주는가?

잠깐, 직접 해 보기 $\int_0^\pi \mathrm{f}^2$와 $\int_0^\pi (\mathrm{f}')^2$를 계산한다. $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$임을 이용하면 도움이 된다. 그 결과 π에 대한 어떤 부등식(inequality)이 얻어지는가?

5단계 어느 쪽이 더 나은가?

다루는 내용: 소문항 (ii)

> **생각해 보기** π에 대하여 얻은 한계(bound)를 제곱하여 포물선에서 얻은 한계와 비교한다.

숨은 수학

푸리에 급수를 이용한 증명

$(*)$는 왜 참일까? 대학에 가면 $[0,\pi]$에서 정의되고 양 끝에서 0이 되는 적당한 함수는 모두 **푸리에**(*Fourier*) **사인 급수**(*Fourier sine series*)

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

로 쓸 수 있다는 것을 배운다. $m \neq n$이면 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, dx = 0$이므로, 제곱하여 적분하면 교차항이 모두 사라져

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots).$$

을 얻는다. 오른쪽 식의 각 항은 왼쪽 식의 대응하는 항보다 크거나 같으므로 $(*)$가 증명되고, 등호는 f가 $\sin x$의 상수배일 때만 성립한다는 것도 알 수 있다. 문제의 소문항 (i)은 항이 하나뿐인 경우이다.

진동하는 현과 양자 입자

비 $\int (\mathrm{f}')^2 / \int \mathrm{f}^2$를 **레일리 몫**(*Rayleigh quotient*)이라 하며, $(*)$는 0과 π에서 고정된 함수에 대해 이 비의 가능한 최솟값이 1이라는 것을 말한다. 이 수에는 물리적인 의미가 있다. 양 끝이 고정된 현에서 $\int (\mathrm{f}')^2$는 늘어남에 따른 에너지를, $\int \mathrm{f}^2$는 변위의 크기를 나타내며, 이 비의 최솟값이 현이 낼 수 있는 가장 낮은 음을 결정한다. 양자역학(quantum mechanics)에

서는 같은 최솟값이 상자에 갇힌 입자의 가장 낮은 에너지이다. 양 끝이 고정된 파동은 휘어질 수밖에 없으므로 이 에너지는 0이 될 수 없다. 레일리 경(Lord Rayleigh)은 바로 이 방법, 즉 시험 함수를 추측하여 비를 계산하는 방법으로 진동계의 진동수를 추정했다. 극단적인 경우가 최솟값을 주므로 어떤 추측이든 실제 최저 진동수의 상한을 주며, 좋은 추측은 매우 정확한 상한을 준다.

변분법

적분의 비를 최소로 만드는 함수를 찾는 것은 **변분법**(*calculus of variations*)의 문제로, 여기서 미지의 대상은 수가 아니라 함수 전체이다. 이 경우의 최소화 함수 $\sin x$는 미분방정식(differential equation) $f'' + f = 0$을 만족하는데, 이것은 우연이 아니다. 적분을 최소화하면 언제나 최소화 함수에 대한 미분방정식이 나온다. 이 아이디어는 Section 4.7에서 다시 다룬다.

더 도전하기

1 **사차식.** $(*)$에 $f(x) = x^2(\pi - x)^2$을 대입하라. 이 함수로는 $\pi^2 \le 12$밖에 얻지 못함을 보여라. 이 시험 함수가 포물선보다 나쁜 이유는 무엇인가? (그 모양을 $\sin x$와 비교해 보라.)

2 **두 사인파.** $f(x) = \sin x + \sin 2x$에 대해 양변을 직접 계산하여 $(*)$를 확인하라.

3 **다른 구간.** 치환을 이용하여 $g(0) = g(L) = 0$이면 $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$임을 보여라. 이것은 길이가 다른 현에 대해 무엇을 말해 주는가?

4 **레일리의 방법.** 심화 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$으로 놓고, π^2에 대한 한계가 가장 좋아지도록 λ를 정하라. (계산이 매우 복잡하므로 컴퓨터 대수 시스템을 쓰면 도움이 된다.)

더 읽을거리

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis*** (Cambridge University Press). 케임브리지의 해석학자가 쓴, 푸리에 급수와 그 응용을 폭넓게 풀어낸 훌륭한 책이다.
- **하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 포여(Pólya), *Inequalities*** (Cambridge University Press). 부등식에 관한 책으로, 7장에서 비르팅거 부등식과 그와 관련된 부등식들을 다룬다.
- **리처드 파인만(Richard Feynman), *The Feynman Lectures on Physics,*** 제II권 19장 ("The principle of least action", 최소 작용의 원리). 적분을 최소화하는 문제를 처음부터 끝까

지 물리적 직관과 함께 다룬 파인만의 강의이다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.7절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/wirtinger.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com