3.6 기울기의 한계

학습지

문제

STEP I 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s1-q7

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** $f'(x)$에 대한 공식은 $-1, 0, 1$에서의 f의 값 세 개만 사용한다. 왜 세 개의 값만으로 이차함수의 도함수(derivative)가 결정되어야 할까?

1단계 공식

다루는 내용: $f'(x)$에 대한 공식

? **생각해 보기** $f(1), f(-1), f(0)$을 a, b, c로 나타낸 다음, 대입하고 x의 거듭제곱끼리 묶는다.

2단계 상계

다루는 내용: $|f'(x)| \le 4$

생각해 보기 공식의 양변에 절댓값을 취하고 $|f(1)|$, $|f(-1)|$, $|f(0)| \le 1$과 함께 삼각부등식(triangle inequality)을 이용한다. x의 함수로서 $|f'(x)|$에 대해 어떤 상계(bound)를 얻는가?

잠깐, 직접 해 보기 부호에 따라 경우를 나누어 $|x| \le 1$일 때 $\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right| + 2|x| \le 4$임을 보인다.

3단계 극단적인 예

다루는 내용: 등호가 성립하는 경우

> **잠깐, 직접 해 보기** $x = 1$에서 상계가 실제로 달성되려면 모든 부등식에서 등호가 성립해야 한다. $f(1), f(-1), f(0)$은 어떤 값을 가져야 하는가? 그 점들을 지나는 이차식을 구한다.

숨은 수학

마르코프 부등식(Markov's inequality)과 체비쇼프 다항식

안드레이 마르코프는 1889년에 p가 $[-1, 1]$에서 $|p(x)| \le 1$을 만족하는 n차 다항식이면

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{단, } |x| \le 1$$

임을 증명했다. $n = 2$일 때 이것은 우리의 상계 4이다. 극단적인 경우는 **체비쇼프 다항식**(*Chebyshev polynomials*) T_n으로, 다음과 같이 정의된다.

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

예를 들어 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$에서 우리의 극단적인 이차함수 $T_2(x) = 2x^2 - 1$을 얻고, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$에서 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$를 얻는다. $T_n(x) = \cos n\theta$이므로 이 다항식들은 n차 다항식이 할 수 있는 한 가장 자주 -1과 1 사이를 진동하며, 양 끝에서 가능한 한 가장 가파르다(그림 3.6.1). 마르코프의 동생 블라디미르(Vladimir)는 1892년에 이 결과를 고계도함수로 확장했다.

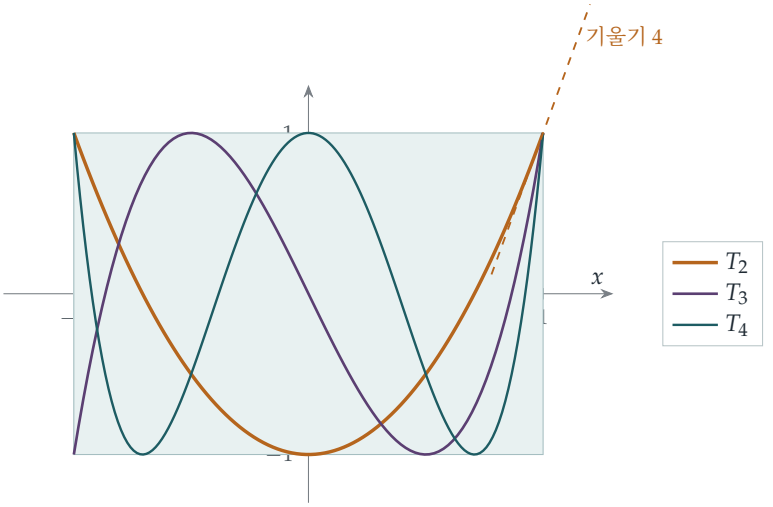

그림 3.6.1 체비쇼프 다항식 $T_2 = 2x^2 - 1$, $T_3 = 4x^3 - 3x$, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$은 상자 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ 안에 머물며, 가능한 한 자주 상자의 위와 아래에 닿는다. 이들은 양 끝에서 같은 차수의 다항식 가운데 가장 가파르다: $T_n'(1) = n^2$. 점선은 $x = 1$에서 T_2에 그은 접선(tangent)으로, 기울기는 4이다.

보간법(interpolation)

문제의 공식은 **라그랑주 보간법**(*Lagrange interpolation*)의 한 예이다. 몇 개의 점에서 함수의 값이 주어지면, 그 점들을 지나는 차수가 가장 낮은 유일한 다항식을 써 내고, 그것으로 함수나 그 도함수를 근사한다. 여기서 세 점은 $-1, 0, 1$이다. 이런 공식은 수치해석(numerical analysis)의 모든 곳에서 쓰이며, 예를 들어 측정 자료로부터 도함수를 추정하는 데 쓰인다. 마르코프 부등식은 이런 공식에 따라붙는 경고이다. 값의 작은 오차가 도함수에서는 최대 n^2배까지 커질 수 있는데, 이것이 바로 멘델레예프가 걱정했던 문제이다.

실제로 쓰이는 체비쇼프 다항식

체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)의 일꾼이다. 함수를 등간격의 점이 아니라 T_n의 근에서 보간하면 오차를 제어할 수 있다. 등간격의 점을 쓰면 고차 보간이 구간의 양 끝 근처에서 크게 어긋날 수 있다(룽게 현상(Runge's phenomenon)). 함숫값을 기계 정밀도까지 계산하거나 미분방정식을 매우 정확하게 푸는 소프트웨어는 내부적으로 체비쇼프 전개를 사용하는 경우가 많다.

더 도전하기

1 **일반적인 아이디어.** f가 이차함수이면 $f(x) = f(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + f(0)(1-x^2) + f(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$임을 보이고, 이를 미분하여 문제의 공식을 다시 얻어라.

2 **유일성(uniqueness).** 심화 $[-1,1]$에서 $|f(x)| \le 1$이고 $[-1,1]$의 어떤 점에서 $|f'(x)| = 4$인 이차함수는 $\pm(2x^2-1)$뿐임을 보여라.

3 **체비쇼프 다항식.** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$를 이용하여 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$임을 확인하고, $T_3'(1) = 9$임을 확인하라. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$임을 보이고, T_4를 구하라.

4 **T_n의 기울기.** $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$를 θ에 대해 미분하여 $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$임을 보이고, $\theta \to 0$으로 보내어 $T_n'(1) = n^2$임을 유도하라.

더 읽을거리

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*** (SIAM). 체비쇼프 다항식과 보간법에 관한 아름다운 현대적 책으로, 실력 있는 고등학생도 읽을 수 있으며 책 전체에 걸쳐 컴퓨터 실험이 실려 있다.
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*** (Springer). 마르코프 부등식과 그 친척들에 대한 전체 이야기를 다룬다. 고급 수준이다.
- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*** (Springer). 라그랑주 보간법, 체비쇼프 다항식, 마르코프형 부등식을 다루는 학부 교재이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.6절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/markov-bound.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com