3.5 π^e인가, e^π인가?

학습지

문제

STEP II 2013, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q1

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 로그(logarithm)를 취하면 $a^b = b^a$는 $b \ln a = a \ln b$와 같다. 이 식을 변형하여 a는 한쪽에만, b는 다른 쪽에만 나타나게 하라.

1단계 원점을 지나는 접선(tangent)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $y = mx$가 $x = x_0$에서 $y = \ln x$에 접한다면, 어떤 두 식이 성립해야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 $y = mx$가 곡선과 $x = a$, $x = b$에서 만난다면, $\ln a$와 $\ln b$를 m으로 나타내어라. m을 소거(eliminate)한 뒤 양변에 지수를 취하여라(exponentiate).

2단계 원점보다 위에서 y축과 만나는 직선

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 이제 $c > 0$일 때 $\ln p = mp + c$, $\ln q = mq + c$이다. $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$를 m과 c로 나타내고 둘을 비교하여라.

3단계 e의 오른쪽에 있는 현(chord)

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $e \le p < q$일 때 $(p, \ln p)$에서 $(q, \ln q)$까지의 현은 p에서의 곡선보다 기울기가 완만하다. 왜 그런가? 이것으로부터 현의 y절편(y-intercept)에 대해 무엇을 알 수 있는가?

잠깐, 직접 해 보기 이 사실과 소문항 (ii)를 $p = e, q = \pi$로 놓고 이용하여라.

4단계 접선에 평행한 현

다루는 내용: 소문항 (iv)

> **잠깐, 직접 해 보기** 현은 접선 $y = \frac{x}{e}$에 평행하고, 곡선은 이 접선보다 아래에 있다. 현은 원점보다 위에서 y축과 만나는가, 아래에서 만나는가? 그다음 c의 부호를 반대로 하여 소문항 (ii)를 다시 해 보아라.

숨은 수학

$\frac{\ln x}{x}$의 그래프

이 문제의 모든 내용은 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프(그림 3.5.1)에서 볼 수 있다. 그 도함수(derivative)는 $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$이므로, h는 $(0, e)$에서 증가하고 $x = e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$에 도달한 뒤 0을 향해 감소한다. 0과 $\frac{1}{e}$ 사이의 높이 m에 그은 수평선은 그래프와 두 번, 즉 $h(a) = h(b)$인 두 점 $a < e < b$에서 만나는데, 이것이 바로 $a^b = b^a$이다. e의 오른쪽에서 h는 감소하므로 $e \le p < q$이면 $h(p) > h(q)$, 즉 $p^q > q^p$이다. 특히 $e^\pi > \pi^e$이고, 더 일반적으로 모든 $x \neq e$에 대하여 $e^x > x^e$이다. 이 게임에서 e를 이기는 수는 없다.

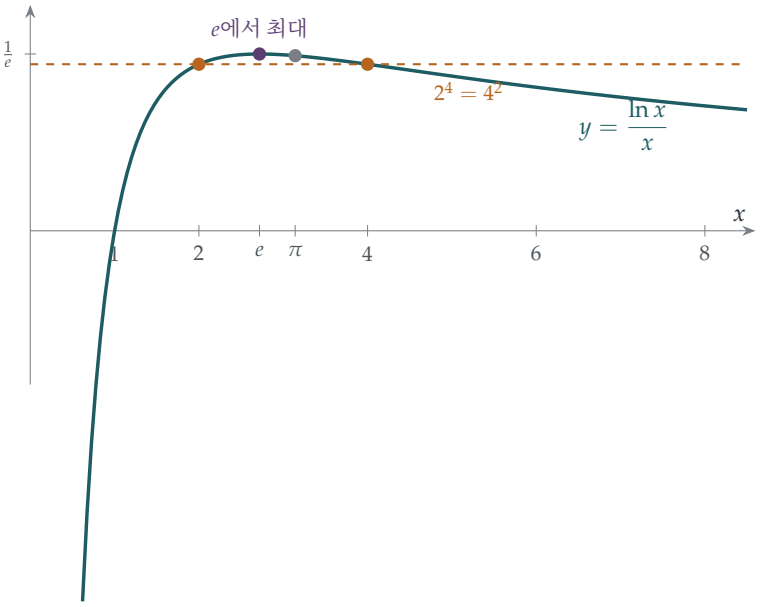

그림 3.5.1 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프. 그래프는 $x = e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$까지 올라갔다가 내려간다. $h(e) > h(\pi)$이므로 $e^\pi > \pi^e$를 얻는다. 높이 $\frac{\ln 2}{2}$의 수평선(호박색)은 $x = 2$와 $x = 4$에서 그래프와 만난다. 이것이 $n^m = m^n$을 만족하는 서로 다른 자연수의 유일한 쌍이다.

$x^y = y^x$의 모든 해

$x^y = y^x$를 만족하는 서로 다른 양의 실수 쌍은 무엇일까? 깔끔한 요령으로 그것을 모두 찾을 수 있다. $t > 1$로 $y = tx$라 두면, $x^{tx} = (tx)^x$로부터 $x^t = tx$를 얻으므로 $x^{t-1} = t$이고

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

$t = 1 + \frac{1}{n}$으로 쓰면 $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$과 $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$을 얻는다. $n = 1$이면 $(2, 4)$이고, $n = 2$이면 $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$인데, 실제로 $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$이다. $n \to \infty$일 때 둘 다 두 갈래가 만나는 점인 e로 수렴한다. 이 문제는 1728년 다니엘 베르누이(Daniel Bernoulli)와 크리스티안 골드바흐(Christian Goldbach)가 주고받은 편지에서 논의되었고, 나중에 오일러(Euler)도 다루었다.

가장 경제적인 밑

함수 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ 역시 $x = e$에서 최대가 된다. 이 사실은 흥미로운 질문 하나에 답해 준다: 기수법의 "비용"을 밑과 필요한 자릿수의 곱으로 정하면, 가장 경제적인 밑은 e이고, 자연수 중에서는 3이다(근소한 차이로 2를 앞선다). 1958년 소련의 세툰(Setun) 같은 몇몇 실험적인 컴퓨터는 3진법을 사용했다.

더 도전하기

1 **자연수.** STEP I 1988, 1번 문제 (step.maths.org/questions/88-s1-q1)를 풀어 보라.

2 **더 많은 비교.** STEP II 2025, 3번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip)를 풀어 보라. 이 절의 그래프를 이용하여 a^b와 b^a 사이의 비교를 더 해결하는 문제로, 그중 하나에서는 e에 대한 수치적 한계가 결정적인 역할을 한다.

3 **한 줄 증명.** $x \neq 0$일 때 성립하는 $e^x > 1 + x$에 $x = \frac{\pi}{e} - 1$을 대입하여 $e^\pi > \pi^e$를 직접 증명하라.

더 읽을거리

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 방정식 $x^y = y^x$를 포함하여 e의 역사를 다룬다.
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale*** (Princeton University Press). $\sqrt{-1}$에 관한 내용만 있는 것이 아니다. 바로 이런 종류의 흥미로운 계산으로 가득하다.
- **Michael Spivak, *Calculus*** (Cambridge University Press). 11장에서는 도함수를 이용하여 그래프의 모양을 이해하는 방법을 완전히 엄밀하게 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.5절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/pi-e-or-e-pi.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com