3.4 부등식을 증명하는 넓이

학습지

문제

STEP III 2011, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$는 곡선과 x축 사이의 넓이이다. 같은 그림에서 $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 어떤 넓이를 나타내는가?

1단계 그림

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$는 곡선과 x축 사이의 넓이이다. 같은 그림에서 $\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 어떤 넓이를 나타내는가?

잠깐, 직접 해 보기 꼭짓점이 $(0,0)$과 (a,b)인 직사각형을 그리고, 두 영역을 모두 색칠하라. 두 영역이 직사각형을 덮는가? 직사각형을 넘어서는 부분이 없는 것은 언제인가?

2단계 영(Young)의 부등식(Young's inequality)

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $f(x) = x^{p-1}$일 때 $f^{-1}(y)$는 무엇인가? 두 적분을 모두 계산하라.

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$을 이용하여 두 번째 적분을 간단히 하라. 등호가 성립하는(equality) 조건은 소문항 (i)의 답을 이용하라.

3단계 역사인 함수(inverse sine)

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\mathrm{f}(x) = \sin x$로 놓아라. $\arcsin y$는 어떻게 적분하는가? $\arcsin y \times 1$로 보고 부분적분(integration by parts)을 시도해 보라.

잠깐, 직접 해 보기 $\arcsin(t^{-1})$에 대한 부등식을 이끌어 내려면, a의 값으로 가장 간단한 값을 고르고 $b = \frac{1}{t}$로 놓아라.

숨은 수학

영에서 휠더까지

William Henry Young은 1912년에 이 부등식을 발표했다. 이 부등식의 중요성은 그것이 이끌어 내는 결과에서 나온다. $\sum a_i^p = 1$이고 $\sum b_i^q = 1$이라고 하자. 각 쌍에 영 부등식을 적용하여 더하면

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

이다. 합이 1이 되도록 a들과 b들의 크기를 조정하면 **휠더 부등식**을 얻는다. 양수들에 대하

여

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}.$$

$p = q = 2$이면 이는 **코시-슈바르츠 부등식** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$이 되는데, 이 부등식은 두 벡터(vector) 사이의 각의 코사인이 1 이하라는 것을 말해 준다. 횔더 부등식은 L^p 공간 이론의 토대이다. L^p 공간은 "거리"를 $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$로 재는 함수들의 공간으로, 함수해석학(functional analysis)과 확률론 강의에서 만나게 될 것이다.

르장드르 변환

그림 3.4.1 (온라인 전체 절에 수록)의 그림은 f와 f^{-1}을 완전히 대칭적으로 다룬다. $F(a) = \int_0^a \mathrm{f}$, $G(b) = \int_0^b \mathrm{f}^{-1}$이라고 쓰자. 부등식은 $F(a) + G(b) \ge ab$이고 곡선 위에서 등호가 성립한다는 것이므로

$$G(b) = \max_a (ab - F(a)).$$

이다. 볼록함수(convex function) F를 새로운 볼록함수 G로 바꾸는 이 연산이 **르장드르 변환**이며, 이를 두 번 적용하면 다시 F로 돌아온다. 역학에서 르장드르 변환은 위치와 속도의 함수인 **라그랑지안**(*Lagrangian*)을 위치와 운동량의 함수인 **해밀토니안**(*Hamiltonian*)으로 바꾼다. 이 둘은 뉴턴(Newton)의 법칙에 대한 동치인 두 정식화로, 대학 2학년 강의에서 만나게 될 것이다. 열역학에서는 에너지, 엔탈피(enthalpy), 자유 에너지(free energy) 사이를 오가게 해 준다. $F(a) = a^p/p$의 변환은 $G(b) = b^q/q$이며, 영 부등식의 두 지수가 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$로 연결되어 있는 것은 이 때문이다.

더 도전하기

---

1 **1987년 버전.** STEP I 1987, 6번 문제 (step.maths.org/questions/87-s1-q6)을 풀어 보자. 같은 종류의 그림을 이용하여 역함수를 적분하는 문제이다. 미분하여 답을 검산해 보자.

2 **코시-슈바르츠.** $p = q = 2$인 영 부등식을 이용하여 양수들에 대하여 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$임을 증명하여라. (**힌트:** 먼저 두 제곱근이 모두 1인 경우를 다루어라.)

3 **지수함수 버전.** $(*)$에서 $\mathrm{f}(x) = e^x - 1$로 두어, $a, b \ge 0$에 대하여

$$ab \le e^a - 1 - a + (1+b)\ln(1+b) - b.$$

임을 보여라. 등호는 언제 성립하는가?

4 **이 한계는 얼마나 좋은가?** 심화계산기를 이용하여 $t = 1, 2, 10$에 대해 $\arcsin(1/t)$와 $t - \sqrt{t^2 - 1}$을 비교하여라. t가 클 때 $t - \sqrt{t^2 - 1} \approx \frac{1}{2t}$이고 $\arcsin(1/t) \approx \frac{1}{t}$임을 보여

라. 왜 이 한계는 2배만큼 차이가 나는가? ($a = 0$일 때의 그림을 보자. 남는 부분 가운데 얼마만큼이 낭비되는가?)

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 제1장과 제9장에서 코시-슈바르츠 부등식과 홀더 부등식을 다루며, 그 과정에서 영 부등식도 소개한다.
- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words*** (Mathematical Association of America). 말 없는 증명. 영 부등식을 비롯한 여러 그림 증명이 실려 있다.
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*** (Springer). 고전역학의 수학적 방법. 아르놀트(Arnold)는 제14절에서 바로 이 그림으로 르장드르 변환을 설명한다. 수준이 높지만 해당 절은 짧다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/areas-inequalities.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com