3.3 볼록성의 힘

학습지

문제

STEP II 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q7

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** $(0, \pi)$에서의 $y = \sin x$처럼 아래로 휘어지는 곡선을 그려 보자. 곡선 위에 두 점을 찍고 직선으로 이어 보자. 현은 곡선보다 위에 있는가, 아래에 있는가?

1단계 오목성(concavity) 확인하기

다루는 내용: 첫 부분

? **생각해 보기** $\sin x$와 $\ln x$의 이계도함수(second derivative)를 구하라. 주어진 구간에서 그 부호는 각각 어떠한가?

2단계 삼각형

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{f}(x) = \sin x$와 세 각 A, B, C에 옌센(Jensen) 부등식을 적용하라. 세 각은 sin이 오목(concave)한 구간 안에 있는가? 세 각의 평균은 얼마인가?

3단계 한 줄로 끝내는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 AM–GM은 곱과 합을 비교한다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 오목 함수는 무엇인가? 그 함수에 옌센 부등식을 적용하라.

4단계 AM–GM 활용하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 첫 번째 부등식: 좌변은 네 개의 항으로 이루어져 있고, 우변에는 세 변수의 곱이 있다. 네 수에 AM–GM을 적용하라. 16은 왜 도움이 되는가?

잠깐, 직접 해 보기 최솟값: $x^5y^5z^5$의 5제곱근(fifth root)이 필요하므로 다섯 개의 수를 사용하라. 나머지 두 수는 무엇이어야 하는가? 등호는 언제 성립하는가?

숨은 수학

볼록함수

대학에서 쓰는 **볼록**(convex)함수(오목함수를 뒤집은 것)의 표준적인 정의에는 도함수가 전혀 등장하지 않는다. 함수 f가 볼록하다는 것은

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2) \qquad \text{모든} x_1, x_2 \text{와} 0 \le t \le 1,$$

에 대하여 이 부등식이 성립한다는 것이며, 이는 정확히 현이 곡선보다 위에 있다는 뜻이다. 이 정의는 $|x|$처럼 미분가능하지 않은 함수나 다변수함수에도 의미가 있다. 덴마크의

공학자이자 수학자인 Johan Jensen은 1906년에 자신의 이름이 붙은 부등식과 함께 볼록함수를 독립된 연구 주제로 만들었다.

어디에나 있는 볼록성

볼록성은 수학과 그 응용 곳곳에 등장한다.

- **확률.** 젠센 부등식에 따르면 오목함수 f와 임의의 확률변수(random variable) X에 대하여 $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \leq \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$이다. 경제학에서 f를 오목한 "효용(utility)" 함수로 택하면, 이 부등식은 사람들이 £0 또는 £200을 반반의 확률로 받는 도박보다 확실한 £100을 더 선호하는 이유, 그리고 보험이 존재하는 이유를 설명해 준다.
- **정보 이론.** 엔트로피(entropy)가 균등분포(uniform distribution)에서 최대가 된다는 사실의 증명은 ln에 대한 젠센 부등식이며, 이 사실은 데이터 압축의 바탕이 된다.
- **최적화.** 볼록함수에는 전역 최솟값(global minimum) 외의 극솟값(local minimum)이 없으므로, "내리막으로 걸어가기"만 하면 언제나 최선의 답을 찾을 수 있다. 이것이 볼록 최적화 문제를 효율적으로 풀 수 있는 이유이며, 문제를 볼록한 형태로 바꾸어 쓰는 데 그토록 많은 노력이 들어가는 이유이다.

Section 3.4에서는 볼록성의 또 다른 면, 즉 함수와 그 역함수 사이의 기하학적 쌍대성(duality)을 살펴볼 것이다.

더 도전하기

1 **정의.** STEP II 2018, 2번 문제 (step.maths.org/questions/18-s2-q2)의 소문항 (i)과 (ii)는 위 상자에 나온 오목성의 현 정의에서 출발하여 세 점에 대한 젠센 부등식까지 쌓아 올린다.

2 **사인의 곱.** STEP II 2018, 2번 문제 (step.maths.org/questions/18-s2-q2)의 소문항 (iii)을 풀어 보자.

3 **예각삼각형.** $\tan x$가 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 볼록함을 보이고, 이로부터 예각삼각형에서 $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$임을 이끌어 내라.

4 **거듭제곱 평균.** x^2이 볼록함을 보이고, 이로부터 $\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$임을 이끌어 내라. 이를 수들의 집합의 분산(variance)에 관한 명제로 해석해 보라.

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 6장 은 볼록성과 젠센 부등식을 다룬다.
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities*** (Mathematical Association of America). 그림으로 증명하는 부등식들을 담았으며, 그중 상당수가 볼록성을 이용한다.
- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*** (Cambridge University Press). 온라인에서 무료로 볼 수 있는 현대의 고전으로, 앞부분의 장들은 볼록성이 실제로 왜 중요한지 보여 준다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/convexity.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com