3.2 AM–GM, 거꾸로

학습지

문제

STEP II 1993, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q8

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** n개에서 $n+1$개로 가는 것보다 2^m개의 수에서 2^{m+1}개의 수로 가는 것이 왜 더 쉬울까?

1단계 두 수

다루는 내용: 두 수의 경우

? **생각해 보기** $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2$를 전개하여 완전제곱식으로 나타내 보아라.

2단계 두 배로 늘리기

다루는 내용: m에 대한 귀납법(induction)

생각해 보기 2^{m+1}개의 수를 앞쪽 절반과 뒤쪽 절반으로 나누어라. 두 절반의 산술평균(arithmetic mean)을 각각 P와 Q라 하자. 귀납 가정(inductive hypothesis)은 각 절반에 대해 무엇을 말해 주는가?

잠깐, 직접 해 보기 두 결과를 곱한 다음, P와 Q에 두 수의 경우를 적용하여라. $\frac{P+Q}{2}$는 무엇인가?

3단계 빈자리 채우기

다루는 내용: 임의의 개수의 항

생각해 보기 온라인 기출 문제 보관소에 실린 시험지에는 오타가 있다. $b_1 = a_2$는 $b_1 = a_1$이어야 한다. 채워 넣은 목록 $b_1, \dots, b_{2^m}$의 평균은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 b들에 $(*)$를 적용한 다음, 양변을 A의 알맞은 거듭제곱으로 나누고 n제곱근을 취하여라.

숨은 수학

코시의 귀납법

코시는 이 증명을 *Cours d'analyse*(해석학 강의, 1821)에 발표했다. 이 책은 2장에서 다룬 엄밀한 해석학의 출발점이 된 책이다. 이 기법은 오늘날 **전진–후진 귀납법**(forward–backward induction)이라 불린다. 무한히 많은 경우의 수열(여기서는 2의 거듭제곱)에 대하여 명제를 증명한 다음, n인 경우가 $n-1$인 경우를 함의함을 보이는 것이다. 이 둘을 합치면 모든 n에 도달한다. 우리의 3단계는 2^m에서 n으로 곧바로 내려가지만, 한 단계씩 내려갈 수도 있다. $n-1$개의 수에 그 평균의 복사본 하나를 덧붙이면 n인 경우가 $n-1$인

경우를 함의함을 알 수 있다.

하나의 부등식, 여러 가지 증명

AM–GM에는 수십 가지 증명이 있으며, 이들을 비교해 보는 것은 수학의 다양한 스타일을 엿보는 좋은 방법이다.

- **볼록성을 이용한 증명.** 로그함수는 오목(concave)하므로, 로그값들의 평균은 평균의 로그값 이하이다. 양변에 지수함수를 취하면 바로 AM–GM이 되며, 이것이 Section 3.3의 주제인 볼록성(convexity)이다.
- **조지 폴리아(George Pólya)의 증명.** $e^{x-1} \geq x$를 이용한다($x = 1$에서 e^{x-1}에 그은 접선(tangent line)은 곡선 아래에 놓인다). 평균을 A라 하고, 각 a_i/A에 이 부등식을 적용하여 곱하면 $\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum(a_i/A - 1)} = e^0 = 1$이다. 폴리아는 이 증명이 꿈속에서 떠올랐다고 말했다.
- **고르게 만들기를 이용한 증명.** 두 수가 서로 다르면 둘 다 그 평균으로 바꾼다. 산술평균은 변하지 않고, 두 수의 경우에 의해 곱은 커진다. 이 과정을 반복하면 모든 수가 평균 쪽으로 밀려간다.

미적분 없는 최적화

AM–GM을 쓰면 많은 최적화 문제가 한 줄로 풀린다. 겉넓이가 주어진 상자 가운데 부피가 가장 큰 것은 무엇인가? 둘레가 주어진 직사각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 무엇인가? (두 수의 경우에 의해 정사각형이다: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$이고, 등호는 $x = y$일 때 성립한다.) 등호 조건은 최적값이 어디에 있는지 알려 주고, 부등식은 그것이 단지 정상점(stationary point)이 아니라 정말로 최적값임을 알려 준다. Section 3.1의 경고와 비교해 보라.

더 도전하기

1 **한 걸음 뒤로.** 평균의 복사본 하나를 덧붙이는 방법으로, n개의 수에 대하여 AM–GM이 성립하면 $n-1$개의 수에 대해서도 성립함을 직접 보여라.

2 **증가하는 수열.** $n+1$개의 수 $1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 1$($1+\frac{1}{n}$이 n개)에 AM–GM을 적용하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$임을 보여라.

3 **최고의 상자.** 닫힌 직육면체 상자의 겉넓이가 S이다. 서로 다른 세 면의 넓이에 AM–GM을 적용하여 부피가 $(S/6)^{3/2}$ 이하이고, 등호는 정육면체일 때 성립함을 보여라.

4 **조화평균.** 수 $1/a_i$에 AM–GM을 적용하여, 조화평균(harmonic mean) $\dfrac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}$이 기하평균 이하임을 보여라.

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 바로 이 수준에서 출발하는, 문제 중심으로 구성된 훌륭한 부등식 책이다. 2장이 AM–GM에 관한 내용이다.
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities*** (Cambridge University Press). 20세기의 위대한 해석학자 세 사람, 하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 폴리아가 쓴 고전적인 참고서이다.
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*** (Springer). 7장에는 올림피아드의 부등식 문제가 대량으로 모여 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/am-gm-backwards.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com