3.1 오류 찾기

학습지

문제

STEP I 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** "각 단계를 비판하라"는 요구를 받았을 때, 각 단계에서 무엇을 확인해야 할까? 시작하기 전에 목록을 만들어 보자.

1단계 도함수가 맞는가?

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 몫의 미분법(quotient rule)으로 g를 직접 미분하고 분자를 인수분해하여라. $g'(x) = 0$이 되는 곳은 어디인가?

잠깐, 직접 해 보기 인수분해한 $g'(x)$에 $x = 1$과 $x = -1$을 직접 대입하여 확인하여라. 이 점들은 정류점(stationary point)인가?

2단계 함숫값이 맞는가?

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** $g(0), g(1), g(-1)$을 직접 계산하여라. 주어진 논증과 일치하는가?

3단계 값을 비교하면 어느 것이 극대인지 알 수 있는가?

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 어떤 함수가 정확히 두 개의 정류점을 가지고, 그 값이 $\frac{3}{4}$와 1이라고 하자. 앞의 것은 반드시 극소(minimum)이고 뒤의 것은 반드시 극대(maximum)이어야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 0의 양쪽에서 $g'(x)$의 부호를 조사하여 $x = 0$에서의 정류점의 종류를 판정하여라.

4단계 정류점에서의 값이 함수의 범위를 제한하는가?

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 그렇다면 결론 자체는 참인가? $x \to \pm\infty$일 때 $g(x)$는 어떻게 되며, $g(x)$가 음수가 되는 것은 언제인가? $g(x) < \frac{3}{4}$인 x를 찾아보아라.

5단계 **적분**

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $-3(1-x)^{-4}$를 미분하여라. $(1-x)^{-3}$이 나오는가?

생각해 보기 올바른 부정적분(antiderivative)을 사용해도 답은 여전히 0이 나온다. 그렇다면 결국 결론이 옳았던 것인가?

잠깐, 직접 해 보기 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 쓰려면 피적분함수가 구간 전체에서 연속(continuous)이어야 한다. $(1-x)^{-3}$은 $[-1,3]$에서 연속인가? 문제가 되는 점 근처에서 적분은 어떻게 되는가?

숨은 수학

위대한 수학자들이 틀렸을 때

바로 이런 종류의 오류를 해석학의 창시자들도 저질렀다. 코시(Augustin-Louis Cauchy)는 1821년의 *Cours d'analyse*(해석학 강의)에서 연속함수들의 수렴하는 합은 언제나 연속이라고 "증명"했다. 1826년 아벨(Niels Henrik Abel)은 반례(counterexample)를 지적했다. 푸리에 급수(Fourier series)

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

는 모든 x에 대해 수렴(converge)하고 각 항은 연속이지만, 그 합은 $x = \pm\pi$에서 불연속적으로 뛴다($-\pi < x < \pi$에서 합은 $x/2$이다). 코시의 논증에서 정확히 무엇이 잘못되었는지 밝혀내는 데는 수십 년이 걸렸고, 그 결과 오늘날 해석학을 배우는 모든 학생이 익히는 **균등수렴**(uniform convergence)의 개념이 탄생했다. 숨은 가정, 특히 두 극한의 순서를 바꾸는 것에 관한 가정은 해석학 전체에서 가장 흔한 오류의 원천이다.

가정이 붙은 정리

이 문제의 오류 가운데 두 가지는 정리의 가정(hypothesis)을 무시한 데서 나온다.

- **최대최소 정리**(extreme value theorem)는 닫힌 유계 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수가 최댓값과 최솟값을 가진다고 말한다. 이것들을 찾으려면 양 끝점, 정류점, 그리고 함수가 미분가능하지 않은 점을 모두 확인해야 한다. 예를 들어 $[-1,1]$에서 $|x|$의 최솟값은 0에서 나타나는데, 이 점은 끝점도 정류점도 아니다. f가 구간 내부의 모든 점에서 미분가능하다면, 내부에서의 최댓값이나 최솟값은 반드시 정류점에서 나타난다. 실수 전체에서는 확인할 끝점이 없으며, 함수가 최댓값을 아예 가지지 않을 수도 있다. 그 대신 $x \to \pm\infty$일 때의 행동을 살펴보아야 한다.
- **미적분학의 기본정리**는 피적분함수가 $[a,b]$에서 연속이어야 한다. 연속이 아니라면 적분이 여전히 존재할 수도 있고($\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$를 계산해 보라), 존재하지 않을 수도 있으며(이 문제처럼), 극한을 이용하여 확인해야 한다.

대학에서 만나는 모든 정리에는 정확한 가정의 목록이 따라온다. 정리를 쓰기 전에 매번 그 가정들을 확인하는 것도 훈련의 일부이다.

발산하는 적분에 값을 주기

소문항 (ii)에는 흥미로운 뒷이야기가 있다. 구간 $[-1,3]$은 문제가 되는 점 $x = 1$에 대해 대칭이고, $(1-x)^{-3}$은 그 점에 대해 "기함수"이다. 대칭인 틈 $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$을 잘라 내고

$\varepsilon \to 0$으로 보내면, 무한대인 두 조각이 상쇄되어 실제로 0을 얻는다. 이것을 **코시 주요값**(Cauchy principal value)이라고 하며, 물리학과 복소해석학에서 실제로 유용하게 쓰인다. 그러나 이것은 의도적으로 선택한 **다른 정의**이며, 우연히 그 값에 도달한 논증은 아무것도 증명하지 못한 것이다.

더 도전하기

1 **거짓말하는 치환.** STEP I 1987, 8번 문제 (step.maths.org/questions/87-s1-q8)을 풀어 보자. 치환(substitution)을 하면 양수인 적분이 음수인 적분과 같아지는 것처럼 보인다. 논증이 정확히 어디에서 무너지는지 찾은 뒤, 두 적분을 올바르게 계산해 보자.

2 **참일까, 거짓일까?** STEP I 1998, 3번 문제 (step.maths.org/questions/98-s1-q3)을 풀어 보자. 증명하거나 반증해야 할 네 개의 주장이 있다. 각각에 대해, 쓰기 시작하기 전에 어느 쪽일지 먼저 예상해 보자.

3 **모든 말은 같은 색이다.** 수학적 귀납법(induction)을 이용한 다음 "증명"의 결함을 찾아보자. 말 한 마리는 자기 자신과 같은 색이다. $n+1$마리의 말이 주어지면, 귀납 가정에 의해 처음 n마리는 같은 색이고, 마지막 n마리도 같은 색이다. 두 무리가 겹치므로 $n+1$마리 모두 같은 색이다.

4 **실제로 존재하는 적분.** 피적분함수가 0에서 정의되지 않음에도 $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$가 존재함을 보이고, 그 값을 구해 보자.

더 읽을거리

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*** (Cambridge University Press). 그럴듯하지만 틀린 논증들을 주제별로 정리한 고전적인 모음집으로, 식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 학생들을 위해 쓰였다.
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis*** (Dover). 정리의 가정이 왜 중요한지 보여 주는 수백 개의 예. 해석학 강의를 듣기 시작한 뒤에 조금씩 들춰 보자.
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*** (Cambridge University Press). 수학자들이 증명의 오류를 어떻게 찾아내고 바로잡는지에 관한 탁월한 대화편.

안내에 따른 전체 풀이는 제 3.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/spot-the-flaw.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com