2.9 e에 다가가는 분수들

학습지

문제

STEP II 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $[0,1]$에서 $t(1-t)$의 최댓값은 얼마인가? 이것은 n이 커질 때 T_n의 크기에 대해 무엇을 알려 주는가?

1단계 두 번 미분하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $p(t) = t^n(1-t)^n = [t(1-t)]^n$이라 하자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$를 이용하여 한 번 미분한다.

잠깐, 직접 해 보기 한 번 더 미분하고 공통인수(common factor) $n\,t^{n-2}(1-t)^{n-2}$를 묶어 낸다. 요구하는 꼴에 맞추려면 $(1-2t)^2$을 $t(1-t)$로 나타낸다.

2단계 부분적분 두 번 하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $p(t)$는 $t = 0$과 $t = 1$에서 0이다. $n \geq 2$일 때 $p'(t)$는 어떠한가? $p(t)\,e^t$를 부분적분(integration by parts)할 때 이것이 왜 중요한가?

잠깐, 직접 해 보기 p''이 나타나도록 부분적분을 두 번 한다. 소문항 (i)을 이용하고 $n!$로 나눈 다음, 두 적분이 무엇인지 알아본다.

3단계 정수 구조

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 부분적분으로 T_0과 T_1을 직접 계산한다.

잠깐, 직접 해 보기 둘 다 정수 a, b에 대하여 $a + be$ 꼴이다. 소문항 (ii)의 점화식(recurrence)이 왜 이 꼴을 유지하는가?

4단계 작으므로 정보를 준다

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 $0 < t < 1$에서 $t^n(1-t)^n$과 e^t의 범위를 구한다. 이로부터 T_n에 대하여 무엇을 얻는가?

잠깐, 직접 해 보기 $0 < a_n + b_n e < \frac{e}{n!}$을 $|b_n|$으로 나눈다. 이것은 e와 $-a_n/b_n$ 사이의 거리에 대하여 무엇을 말해 주는가?

숨은 수학

e가 무리수라는 또 하나의 증명

이 문제는 유명한 정리의 바로 앞에서 멈춘다. 양의 정수 p, q에 대해 $e = p/q$라고 가정하자. 그러면

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

는 **정수**이다. 그런데 $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$이고, n이 충분히 크면 우변은 1보다 작다. 따라서 qT_n은 0과 1 사이에 엄격히 놓인 정수가 되어야 하는데, 이는 불가능하다. 그러므로 e는 무리수(irrational number)이다. 이것은 Section 1.4의 "0과 1 사이에 정수를 가두기" 아

이디어를 급수 대신 적분으로 구현한 것이다. 바로 이런 종류의 적분, 곧 $t^n(1-t)^n$ 같은 다항식을 포함한 적분을 샤를 에르미트(Charles Hermite)는 1873년에 사용하여 e가 **초월수**(*transcendental number*)임을, 즉 정수 계수 다항식의 근이 될 수 없음을 증명했다.

연분수

표에 나온 분수들은 단지 좋은 정도가 아니라 **가장 좋은 것**에 속한다. 오일러(Euler)가 찾은 e의 연분수(continued fraction)는 아름다운 규칙을 가진다.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

그리고 그 수렴분수(convergent)는 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$이다. 우리가 얻은 $-a_n/b_n$은 정확히 세 번째마다의 수렴분수이다. 이보다 작은 분모를 가진 어떤 분수도 e에 더 가까이 가지 못한다. 유리수만이 유한 연분수를 가지므로, 오일러가 찾은 이 규칙 자체가 e가 무리수라는 최초의 증명이었다.

아페리의 기적

1978년 로제 아페리(Roger Apéry)는 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$이 무리수라는 증명을 발표했다. 이는 오일러 이래로 풀리지 않았던 문제였다(Section 2.3 참고). 그의 증명은 너무나 뜻밖이어서 청중은 처음에 그것을 믿지 않았다. 1년 뒤 Frits Beukers는 다음 꼴의 적분을 이용한 짧은 증명을 찾았다.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

여기서 P_n은 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$로부터 만들어진다. 이 적분들은 작고, 양수이며, 통제된 분모로 나눈 "정수 + 정수 $\times\, \zeta(3)$" 꼴이다. 바로 이 문제의 전략 그대로이다. $\zeta(5)$나 $e + \pi$가 무리수인지는 아직도 알려져 있지 않다.

더 도전하기

1. **점화식 돌려 보기.** 점화식으로 $n = 2, 3, 4$일 때의 a_n과 b_n을 계산하고 표의 분수를 확인하라. b_n의 부호가 번갈아 바뀜을 보여라.

2. **더 날카로운 부등식.** $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$임을 보여라. 이것은 $-a_n/b_n$의 오차 추정을 얼마나 개선하는가?

3. **무리성 증명.** 위 상자에 있는 논증을 꼼꼼히 써 보라. $T_n > 0$이라는 사실은 정확히 어디에서 쓰이는가?

4 다른 가중치. 심화 e^t를 e^{2t}로 바꾸어 문제를 다시 풀어라(즉 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,dt$). U_n에 대한 점화식을 구하고, U_n이 유리수 계수를 갖는 1과 e^2의 결합임을 보인 다음, 이 논증으로 여전히 e^2이 무리수임을 증명할 수 있는지 탐구하라. (Section 1.4과 비교하라.)

더 읽을거리

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). 에르미트의 방법을 포함하여 무리성 증명을 다룬 고전적인 짧은 책이다.
- **Alfred van der Poorten, "A proof that Euler missed"**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979). 아페리의 증명과 그것이 받아들여진 과정을 생생하게 전하는 글이다.
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press). 일반적인 수학 독자를 위해 쓴 무리수의 역사이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.9절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/e-approximations.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com