2.8 제곱하고 2 빼기

학습지

문제

STEP III 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $[-2, 2]$ 안의 수는 왜 결코 탈출하지 못할까? $-2 \le x \le 2$일 때 $x^2 - 2$의 최댓값과 최솟값은 무엇인가?

1단계 탈출

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 4^{n-1}은 각 단계마다 2보다 큰 정도가 적어도 네 배씩 커진다는 것을 시사한다. $x_n = 2 + d$로 놓자. x_{n+1}을 d로 나타내면 어떻게 되는가?

잠깐, 직접 해 보기 이 결과를 n에 대한 수학적 귀납법(induction)에 이용한다. 먼저 $n = 1$인 경우를 확인한다.

2단계 $|a| > 2$일 때, 그리고 그때에만 탈출한다

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 "필요충분조건(if and only if)"은 두 개의 별도의 증명이 필요하다는 뜻이다. 소문항 (i)이 한쪽 방향을 거의 다 보여 준다. $a < -2$일 때에는 무엇이 더 필요한가?

잠깐, 직접 해 보기 반대 방향의 경우: $-2 \le x \le 2$이면 $x^2 - 2$는 최대 얼마까지 커질 수 있고, 최소 얼마까지 작아질 수 있는가?

3단계 숨은 공식

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $a > 2$이면 $a = t + \frac{1}{t}$를 만족하는 수 $t > 1$이 존재한다. 그 이유는 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 x_2와 x_3을 t로 나타내어 보자. x_n에는 어떤 규칙이 있는가?

4단계 곱이 연쇄적으로 소거된다

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$는 무엇인가? 그 결과에 $t^2+\frac{1}{t^2}$을 곱해 보자. $\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n$은 어떻게 되는가?

잠깐, 직접 해 보기 x_{n+1}^2-4를 t로 나타내어 계산하고, 그것을 위의 곱과 비교한다. y_n에 대한 두 식이 일치하게 하는 A의 값은 무엇이며, a를 A로 나타내면 어떻게 되는가?

5단계 y_n**은 수렴(converge)하는가?**

다루는 내용: 소문항 (iii)

> **생각해 보기** 이 a의 값에서 y_n을 x_{n+1}만으로 나타낸다. 소문항 (ii)는 x_{n+1}에 대해 무엇을 알려 주는가?

숨은 수학

질서와 혼돈

$[-2, 2]$ 안에서는 무슨 일이 일어날까? 거기서는 $a = t + 1/t$가 통하지 않지만($|a| \geq 2$가 필요하다), 삼각함수 버전이 통한다. $a = 2\cos\theta$라 하자. 그러면 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$이고, 일반적으로

$$x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta).$$

따라서 구간 안에서 이 사상은 단지 **각을 두 배로 만든다**. 해롭지 않게 들리지만, 각을 두 배로 만드는 것은 혼돈적이다. θ/π를 이진법(binary)으로 써 보자. 두 배로 만들면 소수점이 오른쪽으로 한 자리 이동하면서 맨 앞자리 숫자가 버려진다. 50단계 뒤에 x_n은 θ/π의 이진 전개에서 51번째 자리 숫자에 의존하므로, 시작값에 10^{-15}(보통 컴퓨터의 정밀도)만큼의 오차가 있으면 50단계 뒤의 답은 전혀 믿을 수 없게 된다. 이러한 초기 조건에 대한 민감한 의존성(sensitive dependence on initial conditions)이 혼돈의 특징이며, 그림 2.8.1에 나타나 있다. 사상 $x \mapsto x^2 - 2$는 변수를 바꾸면 유명한 로지스틱 사상(logistic map) $x \mapsto 4x(1-x)$와 동등하며, 이 사상은 Section 8.7에서 다시 만난다.

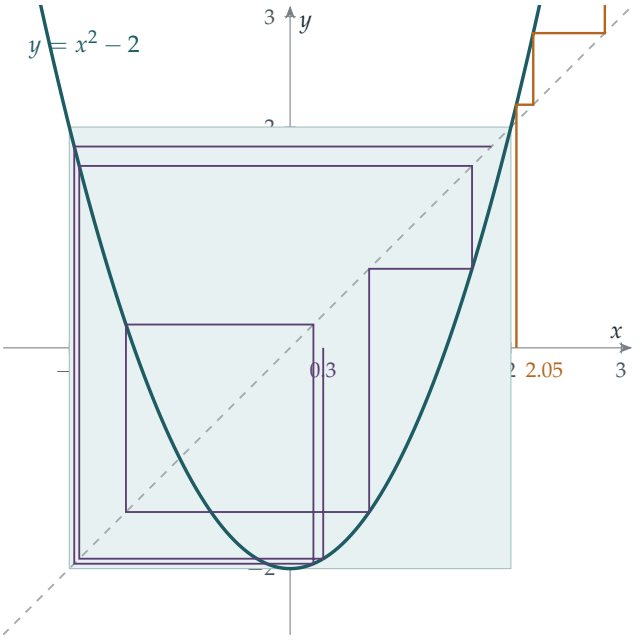

그림 2.8.1 $x_{n+1} = x_n^2 - 2$의 거미줄 그림(cobweb diagram). 0.3(자주색)에서 시작하면 궤도(orbit)는 음영 처리된 정사각형 $[-2,2]^2$ 안에 영원히 머물며 혼돈적으로 떠돈다. 바로 바깥인 2.05(호박색)에서 시작하면 궤도는 탈출한다: $2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

가장 큰 소수 찾기

메르센 수는 $M_p = 2^p - 1$이다. 1876년에 에두아르 뤼카(Édouard Lucas)가 발견하고 1930년에 데릭 레머(Derrick Lehmer)가 완성한, M_p가 소수인지(p가 홀수인 소수일 때) 판정하는 놀라운 방법이 있다. $s_0 = 4$에서 시작하여 제곱하고 2를 빼는 일을 되풀이하되, 매번 M_p를 법으로 하여 줄인다. 그러면

$$M_p\text{는 소수} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

$M_7 = 127$의 경우 $s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$이므로 127은 소수이다. 이 문제와의 연결 고리는 치환이다. $t = 2 + \sqrt{3}$으로 두면 $4 = t + 1/t$이므로 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$이고, 판정법의 증명에는 Section 1.6의 가우스 정수(Gaussian integers)와 비슷한 $a + b\sqrt{3}$ 꼴의 수의 산술이 쓰인다. 각 단계에 제곱 한 번만 필요하므로 이 판정법은 매우 빠르며, 그래서 현재의 기록 보유자를 포함하여 알려진 가장 큰 소수들 대부분이 메르센 소수이다(모두가 그런 것은 아니다. $a^{2^n} + 1$과 같은 다른 특수한 꼴에도 그 나름의 빠른 판정법이 있다). 이 글을 쓰는 시점의 기록은 2024년에 발견된 $2^{136279841} - 1$로, 41백만 자리가 넘는 수이다.

망델브로 집합

-2를 임의의 상수 c로 바꾸고 복소수를 허용하자: $z \mapsto z^2 + c$. 0의 궤도가 유계로 남는 c들의 집합이 **망델브로 집합**(*Mandelbrot set*)이다. 우리의 사상은 $c = -2$로, 망델브로 집합의 가장 왼쪽 점이며, 궤도가 유계로 남는 시작값들의 집합(이 사상의 **쥘리아 집합**(*Julia set*))은 바로 소문항 (ii)에서 찾은 구간 $[-2, 2]$이다. 거의 모든 다른 c에 대해서는 이 집합이 프랙털(fractal)이 된다.

더 도전하기

1 **구간 안에서.** $a = 2\cos\theta$이면 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$임을 증명하라. $x_3 = a$이지만 $x_2 \neq a$인 a의 값을 모두 구하라. (**힌트:** 2π를 법으로 하여 $4\theta \equiv \pm\theta$가 되기를 원한다.)

2 **손으로 하는 뤼카–레머 판정.** 판정법을 이용하여 $M_5 = 31$은 소수이고 $M_{11} = 2047$은 소수가 아님을 보여라. (M_{11}에는 아홉 단계가 필요하며, 계산기가 도움이 된다. 2047을 인수분해하여 결론을 확인하라.)

3 **구체적인 예.** $A = \frac{3}{2}$로 두자. a와 t를 구하고, 공식 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$를 수치로 확인하라.

4 **연쇄 소거되는 합.** 심화 $a = t + 1/t$이고 $t > 1$일 때

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

임을 보여라. 항등식 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$에 $z = t^{2^n}$을 넣어 다음을 유도하라.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

$a = 3$일 때 이를 수치로 확인하라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin). 로지스틱 사상을 포함하여 혼돈을 다룬 고전적인 대중서이다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 표준적인 학부 입문서이며, 10장은 이와 같은 1차원 사상을 다룬다.
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*** (Fourth Estate). 메르센 소수를 찾는 이야기가 담겨 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/squaring-minus-two.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com