2.7 여섯 자리인가, 육백 자리인가

학습지

문제

STEP II 2023, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** 두 목록에서 눈에 띄는 점이 있는가? (두 목록에 모두 나타나는 분수를 살펴보라.)

1단계 첫 번째 방법의 값은 항상 1 이상이다

다루는 내용: 소문항 (i)

> **생각해 보기** x_{n+1}을 $1 + \frac{1}{\text{무언가}}$ 꼴로 다시 쓴다. 그런 다음 수학적 귀납법(induction)을 사용한다.

2단계 첫 번째 방법의 오차

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 $x_{n+1}^2 - 2$를 x_n에 대한 하나의 분수로 나타낸다. 분자에서 무엇을 알 수 있는가? $\frac{1}{(x_n+1)^2}$은 얼마나 작아야 하는가?

3단계 열 단계

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 x_0에서 시작하여 부등식(inequality)을 열 번 적용한다. 부등호의 방향은 $x_n^2 - 2$의 부호를 따라가며 정한다. 매 단계에서 이 부호는 어떻게 되는가?

4단계 두 번째 방법의 오차

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 $y_{n+1} - \sqrt{2}$를 하나의 분수로 나타낸다. 분자를 보면 완전제곱식(perfect square)이 떠오를 것이다. 그런 다음 수학적 귀납법으로 $y_n \geq 1$임을 보인다.

5단계 오차의 제곱

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $e_n = y_n - \sqrt{2}$라 하자. $y_n \geq 1$을 이용하여 e_{n+1}을 e_n^2에 대한 식으로 위에서 押えて 評価한다.

잠깐, 직접 해 보기 $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$일 때, $n \geq 1$에 대하여 $e_n \leq 2r^{2^n}$임을 수학적 귀납법으로 증명한다. 기초 단계(base case)를 꼼꼼히 확인한다.

6단계 육백 자리

다루는 내용: 소문항 (ii)

? **생각해 보기** r과 $\frac{1}{4}$를 비교하면 어떠한가? 그런 다음 2^{10}과 10^3을 비교한다.

숨은 수학

뉴턴 방법

두 번째 방법은 $f(y) = y^2 - 2$에 **뉴턴 방법**(Newton's method)을 적용한 것이다. 뉴턴 방법은 추측값 y를 y에서의 접선(tangent)이 축과 만나는 점으로 바꾸는 과정을 반복하여 f의 근을 찾는다.

$$y_{\text{새}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

단순근(simple root) α 근처에서 테일러 전개(Taylor expansion)를 하면 새 오차가 대략 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{이전 오차})^2$임을 알 수 있다. 이것이 뉴턴 방법이 이차 수렴(quadratic convergence)하는 이유이다. "y와 $2/y$의 평균을 취한다"는 이 특별한 경우는 바빌로니아인들도 알고 있었다. 오늘날 YBC 7289라고 불리는 기원전 1700년경의 점토판에는 $\sqrt{2}$가 60진법으로, 백만분의 일보다 작은 오차로 적혀 있다.

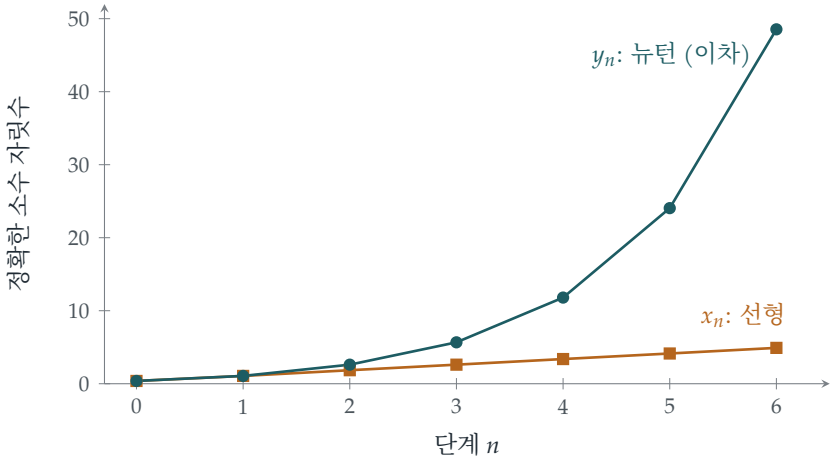

그림 2.7.1 각 방법을 n단계 적용한 뒤 얻은 $\sqrt{2}$의 정확한 소수 자릿수. 선형 방법은 단계마다 약 0.77자리씩 늘어나고, 뉴턴 방법은 단계마다 정확한 자릿수가 대략 두 배가 되어 $n = 10$에서는 약 780자리에 이른다.

고정점과 수렴 속도

두 방법 모두 $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$인 $u_{n+1} = g(u_n)$ 꼴이므로, Section 2.2의 거미줄 그림(cobweb diagram)에서처럼 $\sqrt{2}$는 **고정점**(fixed point)이다. 고정점 α 근처에서 오차는 각 단계마다 약 $g'(\alpha)$배가 된다. 첫 번째 방법에서는 $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$이고 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$이다. 음의 부호는 부호가 번갈아 바뀌는 현상을 설명하고, 0.17은 단계마다 0.77자리씩 늘어나는 것을 설명한다($\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$). 뉴턴 방법에서는 $g'(\alpha) = 0$이므로 일차항이 사라지고, 오차는 그다음 항, 곧 제곱항이 결정한다. $g'(\alpha) = 0$인 반복을 설계하는 것이 빠른 수치 계산법의 기술이다.

같은 분수가 나타나는 이유

분수 $x_n = p_n/q_n$은 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$과 $q_{n+1} = p_n + q_n$을 만족하고, $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$이며 부호가 번갈아 나타난다. 이들은 **펠 방정식**(Pell's equation) $p^2 - 2q^2 = \pm 1$의 해이며, 연분수(continued fraction) $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$의 근사분수(convergent)이다. 이들은 $1 + \sqrt{2}$의 거듭제곱에서 나온다. 즉 $p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$이다. 뉴턴 방법의 한 단계는 $p + q\sqrt{2}$를 **제곱**한다(직접 확인해 보라. $(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$이고, $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$는 정확히 p/q에 뉴턴 공식을 적용한 것이다). 제곱하면 지수가 두 배가 되므로 $y_n = x_{2^n-1}$이다. 같은 "제곱" 패턴이 Section 2.8의 반복을 이끈다.

더 도전하기

1 **펠 방정식.** $y_n = p/q$가 기약분수이고 $p^2 - 2q^2 = 1$이면, $y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$도 이 방정식을 만족함을 보여라. $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$임을 확인하라.

2 **세 제곱근.** $f(y) = y^3 - 2$에 대한 뉴턴 방법을 적고, $\alpha = \sqrt[3]{2}$일 때 새 오차가 $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$임을 보여라. 이로부터 $y_n > \alpha$이면 새 오차가 이전 오차의 제곱의 많아야 $\frac{1}{\alpha}$배임을 이끌어 내라. (**힌트:** $\alpha^3 = 2$를 이용하라.)

3 **나누지 않고 나누기.** $f(y) = \frac{1}{y} - a$에 대한 뉴턴 방법이 나눗셈이 필요 없는 $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$을 줌을 보여라. $e_n = 1 - ay_n$이라 하면 $e_{n+1} = e_n^2$임을 보여라. (컴퓨터 프로세서는 이와 같은 반복을 이용해 나눗셈을 한다.)

4 **뉴턴 방법이 실패할 때.** 유일한 근이 0인 $f(y) = y^{1/3}$에 뉴턴 방법을 적용하라. 어떤 값에서 시작하든 각 단계가 근으로부터의 거리를 두 배로 만듦을 보여라. 오차 공식의 어떤 가정이 성립하지 않는가?

더 읽을거리

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*** (Cambridge University Press). 수치해석 입문. 학부의 표준 교재로, 제1장에서 고정점 반복과 뉴턴 방법을 다룬다.
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics*** (Princeton University Press). 프린스턴 응용수학 안내서. 뉴턴 방법과 수치해석에 관한 짧은 글들이 실려 있으며, 전문가들이 폭넓은 독자를 위해 썼다.
- **David Fowler & Eleanor Robson, "Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context"**, *Historia Mathematica* 25 (1998). 고대 바빌로니아 수학의 제곱근 근삿값을 YBC 7289를 중심으로 살펴본 논문.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.7절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/newton-speed.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com