2.6 산술–기하 평균

학습지

문제

STEP II 2024, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 서로 다른 두 양수의 산술평균이 기하평균보다 항상 큰 이유는 무엇인가? 한 줄로 증명할 수 있는가?

1단계 두 수열이 서로 조여 든다

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 문제에 주어진 힌트 $(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2>0$을 이용한다. 이 식은 x_{n+1}과 y_{n+1}에 대해 무엇을 말해 주는가?

생각해 보기 왜 $x_{n+1}<x_n$이고 $y_{n+1}>y_n$인가? 이 사실은 두 수열(sequence)에 대해 무엇을 알려 주는가?

잠깐, 직접 해 보기 두 수열 사이의 간격을 보려면 $x_{n+1}-y_{n+1}$을 $x_{n+1}-y_n$과 비교한다. 한 단계마다 간격은 몇 배로 줄어드는가?

2단계 치환

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$로 놓고 $t^2 + pq$와 $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$을 계산한다. 이 식들은 인수분해(factorise)되는가?

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$도 구한다. x가 0부터 ∞까지 변할 때 t는 어떻게 변하는가? 이 조각들을 하나로 모으고, t에 대한 피적분함수(integrand)가 우함수(even function)라는 사실을 이용한다.

3단계 적분값 구하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

> **잠깐, 직접 해 보기** (x_0, y_0)에서 시작하여 항등식(identity)을 반복해서 적용한다. $n \to \infty$일 때 $\mathrm{I}(x_n, y_n)$은 어떻게 되는가? $\mathrm{I}(M, M)$은 직접 계산한다.

숨은 수학

문제가 말해 주는 것보다 더 빠르다

소문항 (i)은 차가 매 단계마다 적어도 절반으로 줄어든다는 것을 보여 주는데, 이는 단계마다 이진 자릿수가 대략 하나씩 늘어난다는 뜻이다. 그런데 도입의 표는 훨씬 더 극적인 것을 보여 준다. 정확한 자릿수가 매 단계마다 대략 **두 배**가 된다$(2, 4, 10, 21, 43, \ldots)$. 실제로

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\right)^2},$$

이므로 각 차는 대략 이전 차의 **제곱**에 상수를 곱한 것이다. 이를 **이차 수렴**(quadratic convergence)이라 하며, Section 2.7에서 제대로 공부할 것이다.

타원적분

우리의 적분 $\mathrm{I}(p, q)$는 모습을 바꾼 **완전 타원적분**(complete elliptic integral)이다. 이것은 타원의 호의 길이를 계산할 때 나타나는 적분으로, 여러분이 아는 함수들로는 나타낼 수 없다. 가장 유명한 응용은 진자(pendulum)이다. 주기에 대한 A 레벨(A level, 영국의 대학 입시 과정) 공식 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$는 작은 진폭에 대해서만 성립하는 근삿값이다. 각 θ_0에서 놓은 진자의 정확한 주기는

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\left(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

로, 산술기하평균으로 값을 구하는 타원적분이다. $\theta_0 = 90^\circ$일 때 실제 주기는 단순한 공식이 예측하는 것보다 약 18% 더 길다. 가우스의 일기 내용은 8자 모양의 곡선인 렘니스케이트에 관한 것이었는데, 그 전체 호의 길이에는 $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$가 들어 있다. 이 적분은 모습만 바꾼 $\mathrm{I}(\sqrt{2},1)$과 같으므로, 산술기하평균으로 그 값을 구할 수 있다.

π 계산하기

1976년에 Richard Brent와 Eugene Salamin은 각자 독립적으로 가우스의 아이디어를 매 단계마다 정확한 자릿수를 두 배로 늘리는 π 계산 알고리즘으로 바꾸어 놓았다. 스물다섯 단계면 수천만 자리를 얻는다. 이런 종류의 알고리즘은 1980년대와 1990년대에 π 계산의 기록을 경신하는 데 쓰였으며, 이와 같은 이차 수렴 알고리즘은 오늘날 높은 정밀도가 필요한 곳이면 어디서나 표준으로 쓰인다. 단계마다 약 0.6자리씩 늘어나는 Section 2.5의 비에트(Viète)의 곱과 비교해 보라.

더 도전하기

1 **이차 수렴.** 항등식 $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$을 증명하고, 이로부터 $x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{(x_n-y_n)^2}{8y_0}$임을 보여라.

2 **손으로 계산하기.** 계산기를 사용하여 $M(2,1)$을 소수점 아래 여섯 자리까지 구하라. 몇 단계가 필요했는가?

3 **스케일링.** $\lambda > 0$에 대하여 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$이고 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$임을 보여라. 이 두 사실이 $\mathrm{I}(x_0,y_0) = \pi/(2M)$과 모순되지 않음을 확인하라.

4 **진자.** 위의 공식을 이용하여, 60°에서 놓은 진자의 주기가 작은 각 근사의 예측보다 얼마나 더 긴지 유효숫자 세 자리까지 구하라.

더 읽을거리

- **David Cox, "The arithmetic–geometric mean of Gauss"**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984). 역사와 수학을 다룬 고전적인 해설로, 앞부분은 미적분만 알면 읽을 수 있다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 산술기하평균과 π의 고속 계산에 관한 결정판이라 할 만한 책이다.
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters). 실험 수학을 다룬 책으로, 가우스의 발견처럼 수치적 우연의 일치를 포착하여 이루어진 발견들을 담고 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.6절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/agm.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com