2.5 비에트의 곱

학습지

문제

STEP III 2022, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 sinh의 배각 공식은 무엇인가? (확실하지 않다면 $\sinh 2y$와 $\sinh y \cosh y$를 지수함수로 나타내어 비교해 보아라.)

1단계 반으로 나누기를 되풀이하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $n = 1$인 경우는 배각 공식(double-angle formula) $\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$에 $y = \frac{x}{2}$를 대입한 것이다.

잠깐, 직접 해 보기 공식이 n에 대해 성립하면, 마지막 인수는 $\sinh(x/2^n)$이다. 이 인수에 배각 공식을 적용한다. 이어지는 결론을 이끌어낼 때는 x로 나누고 식을 정리한다.

2단계 극한

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $\sinh y$의 급수(series) 전개로부터, $y \to 0$일 때 $\frac{\sinh y}{y}$는 어디로 수렴(converge)하는가?

잠깐, 직접 해 보기 x를 고정하고 소문항 (i)에서 $n \to \infty$로 보낸다. 이때 $\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$은 어떻게 되는가?

3단계 $\ln 2$에 대한 공식

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $x = \ln 2$이면 $e^{x/2} = \sqrt{2}$이다. $\cosh \frac{x}{2}$와 $\cosh \frac{x}{4}$를 계산하고 간단히 정리한다.

잠깐, 직접 해 보기 $\cosh(x/2^k)$의 일반적인 규칙을 찾는다. 인수들을 모두 곱하면 2의 거듭제곱들은 합쳐져서 무엇이 되는가? 또한 $\frac{\sinh x}{x}$도 계산한다.

4단계 비에트(Viète)의 공식

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 소문항 (iv)에는 π가 들어 있으므로 보통의 삼각법(trigonometry)에서 나온 것이어야 한다. sinh와 cosh 대신 sin과 cos를 써도 소문항 (i)과 (ii)가 여전히 성립하는가?

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$가 되도록 x를 택하고, 처음 몇 개의 인수를 계산한다. 반각 공식(half-angle formula) $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$이 도움이 된다.

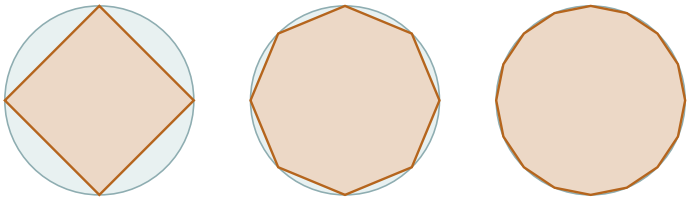
숨은 수학

아르키메데스의 다각형

비에트의 공식에는 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라가는 기하학적 의미가 있다. 반지름이 1인 원에 내접하는 변이 2^n개인 정다각형(regular polygon)의 넓이는 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$이다. 변의 개수를 두 배로 늘리면 넓이에

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

이 곱해진다. 정사각형($A_2 = 2$)에서 시작하여 끝없이 두 배로 늘려 가면 넓이는 원의 넓이 π로 수렴한다. 따라서 $\pi = 2 \div (\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots)$이고, 이것이 비에트의 공식이다. 곱의 각 인수는 그림 2.5.1에서 이웃한 두 다각형의 넓이의 비이다.



정사각형
넓이 2

정팔각형
넓이 $2\sqrt{2} \approx 2.83$

정16각형
넓이 ≈ 3.06

그림 2.5.1 반지름이 1인 원에 내접하는 변이 4개, 8개, 16개인 정다각형. 변의 개수를 두 배로 늘릴 때마다 넓이는 비에트의 곱의 인수 하나만큼씩 더 나누어지며, 넓이는 π를 향해 증가한다.

무한곱

비에트의 곱은 수학에서 최초의 무한곱이었다. 그 뒤로 다른 무한곱들이 이어졌다. 존 월리스(John Wallis)는 1655년에 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$을 발견하였고, $\frac{\sin x}{x}$에 대한 오일러(Euler)의 곱은 Section 2.4에서 나왔다. 대학에서는 무한곱이 언제 수렴(converge)하는지를 배우게 된다. 대략적으로 말하면, 작은 양수 a_n에 대하여 $\prod(1+a_n)$은 $\sum a_n$과 비슷하게 행동하는데, 이는 $\ln(1+a_n) \approx a_n$이기 때문이다. 여기서는 $1-\cos(\pi/2^n) \approx \frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$이고, 이 값은 매번 4분의 1로 줄어들므로 곱은 빠르게 수렴한다.

얼마나 빠른가?

인수 n개를 곱한 부분곱은 정확히 $\dfrac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})}$과 같고, 그 오차는 약 $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$에 $\frac{2}{\pi}$를 곱한 값이다. 인수가 하나 늘어날 때마다 답은 약 4배 정확해지며, 이는 소수점 아래 자릿수로 약 0.6자리를 얻는 셈이다. 인수 열 개를 곱하면 $2/\pi$를 소수점 아래 여섯째 자리까지 정확하게 얻는다. 좋은 결과이지만, 단계마다 정확한 자릿수를 두 배로 늘리는 Section 2.6의 방법에 비하면 어림도 없이 느리다.

더 도전하기

1 **1990년 판.** STEP I 1990, 8번 문제 (step.maths.org/questions/90-s1-q8)를 풀어 보아라. 이 문제는 sin의 배각 공식 외에는 아무것도 사용하지 않고, 이 절과는 다른 경로로 비에트

의 곱에 도달한다. 어느 접근이 더 자연스럽게 느껴지는가?

2 **다른 각.** $\frac{\sin x}{x}$에 대한 곱에 $x = \frac{\pi}{3}$을 대입하여 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$를 무한곱으로 나타내고, 처음 두 인수를 간단히 하여라.

3 **인수가 몇 개 필요한가?** 계산기를 사용하여 π를 소수점 아래 4자리까지 정확하게 얻으려면 비에트의 곱의 인수가 몇 개 필요한지 구하여라. 인수가 하나 늘어날 때마다 왜 약 0.6자리를 얻는지 설명하여라.

4 **$\ln 3$에 대한 공식.** $x = \ln 3$으로 두고 소문항 (iii)을 반복하여 $\frac{1}{\ln 3}$을 무한곱으로 나타내어라. $\frac{1}{\ln 3}$을 소수점 아래 두 자리까지 얻으려면 인수가 몇 개 필요한가? 이 곱은 왜 비에트의 곱보다 느리게 수렴하는가?

더 읽을거리

- **Petr Beckmann, *A History of* π** (St Martin's Press). 아르키메데스, 비에트, 월리스 등의 이야기를 열정적으로 들려준다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). Section 2.6의 방법을 포함하여 π 계산의 본격적인 수학을 다룬다. 이 장을 공부하고 나면 제1장은 읽을 수 있다.
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights*** (Princeton University Press). 비에트와 그의 곱에 관한 장이 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/viete.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com