2.4 $\pi^2/6$

학습지

문제

STEP III 2018, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q7

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 다항식 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$의 근이 $r_1, \ldots, r_n$이라면, $r_1 + \cdots + r_n$을 계수로 나타내면 무엇인가?

1단계 드무아브르(De Moivre)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\cot\theta + \mathrm{i}$를 분모가 $\sin\theta$인 하나의 분수로 나타내어 보자. 분자에 대해 무엇을 알 수 있는가?

잠깐, 직접 해 보기 드무아브르 정리(De Moivre's theorem)를 이용하여 $\cot\theta + \mathrm{i}$와 $\cot\theta - \mathrm{i}$를 각각 $2n+1$제곱한 다음, 서로 빼어라.

2단계 다항식(polynomial)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 이제 $c = \cot\theta$로 두고 이항정리(binomial theorem)를 이용하여 $(c+\mathrm{i})^{2n+1} - (c-\mathrm{i})^{2n+1}$을 전개하여라. 어떤 항이 소거되고, 어떤 항이 두 배가 되는가?

잠깐, 직접 해 보기 어떤 θ에 대하여 $\sin(2n+1)\theta = 0$이면서 $\sin\theta \neq 0$인가? 이 값들을 이용하여 $x = \cot^2\theta$에 대한 다항식의 서로 다른 근(root) n개를 구하여라. 왜 이것들이 이 다항식의 근 전부인가?

3단계 근의 합

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 다항식 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$의 근이 $r_1, \ldots, r_n$이면 $r_1 + \cdots + r_n = -a_{n-1}/a_n$이다. 소문항 (i)에서 두 계수(coefficient)를 읽어 내어라.

4단계 조임(squeeze)

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때 성립하는 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$에서 출발하여라. 역수(reciprocal)를 취한 다음 제곱하여라. $\frac{1}{\sin^2\theta}$는 $\cot^2\theta$와 어떤 관계가 있는가?

잠깐, 직접 해 보기 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$을 대입하고 $m = 1, \ldots, n$에 대하여 더하여라. 소문항 (ii)로부터 바깥쪽의 두 합을 구할 수 있다. $n \to \infty$일 때 양쪽 경계는 각각 어떤 값으로 수렴(converge)하는가?

숨은 수학

오일러의 대담한 논증

1734년 오일러 자신의 논증은 현대의 기준으로 엄밀하지는 않았지만, 눈부셨다. 근이 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$이고 0에서의 값이 1인 다항식은 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$로 인수분해된다. 함수 $\frac{\sin x}{x}$는 0에서의 값이 1이고 근이 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$이므로, 오일러는 이를 "무

한 다항식"으로 취급하여 다음과 같이 썼다.

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

우변에서 x^2의 계수는 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$이고, 매클로린 급수(Maclaurin series) $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$에서는 그 계수가 $-\frac{1}{6}$이다. 둘을 비교하면 $\pi^2/6$을 얻는다. 우리의 STEP 증명은 같은 아이디어의 유한하고 엄밀한 판이다. 근이 π의 배수와 연결된 다항식, 그리고 그 두 번째 계수가 핵심이다.

제곱의 역수를 넘어서

오일러는 이어서 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$, $\sum 1/m^6 = \pi^6/945$를 구했고, 일반적으로 $\sum 1/m^{2k}$는 π^{2k}의 유리수 배이며 여기에는 **베르누이 수**(Bernoulli numbers)가 관여한다. 홀수 거듭제곱은 전혀 다른 이야기이다. Section 2.3에서 보았듯이, $\sum 1/m^3$에 대한 공식은 아무도 알지 못한다. 이 합들은 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 값 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$이며, 이 함수가 복소수 인수에서 보이는 성질은 소수(prime)의 분포를 지배한다(Section 1.2).

다시 만나게 될 곳

대학에서는 $\zeta(2) = \pi^2/6$의 증명을 적어도 세 가지 더 만나게 된다. 하나는 **푸리에 급수**(Fourier series, 함수를 사인과 코사인의 합으로 나타내는 것)를 이용한 증명이고, 하나는 이중적분(double integral)을 이용한 증명이며, 또 하나는 복소해석학(complex analysis)을 이용한 증명이다. 그리고 이 수는 확률(probability)에서도 나타난다. 무작위로 고른 두 자연수가 공약수를 갖지 않을 확률은 $6/\pi^2 \approx 0.61$이다. (소수 p가 두 수를 모두 나눌 확률은 $1/p^2$이므로, 어떤 소수도 두 수를 모두 나누지 않을 확률은 $\prod_p (1 - 1/p^2)$이며, 오일러는 이 곱이 $1/\zeta(2)$와 같음을 보였다.) 확률의 극한에 π가 나타나는 또 다른 예는 Section 12.23의 주제이다.

더 도전하기

---

1 **1992년 판.** STEP III 1992, 8번 문제 (step.maths.org/questions/92-s3-q8)에 도전해 보아라. 이 절의 다항식과 비슷한 다항식을 이용하여 탄젠트의 제곱과 코시컨트의 제곱의 합을 정확히 구한다. (**힌트:** 근이 r_i인 다항식을 알고 있다면, 근이 $1/r_i$인 다항식은 무엇인가?)

2 **홀수의 제곱.** $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$으로부터 $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$임을 이끌어 내어라.

3 **네제곱.** 심화 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$와 다항식의 계수를 이용하여 $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$을 구하고, 조임을 변형하여 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$임을 증명하여라.

4 **얼마나 빠른가?** 소문항 (iii)의 하한을 이용하여 $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$임을 보여라. 부분합이 $\pi^2/6$과의 차이가 0.001 이내가 되려면 n이 얼마나 크면 충분하다고 이 부등식이 보장하는가? 실제 오차가 $1/n$에 가깝다는 사실과 비교해 보아라.

더 읽을거리

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All*** (Mathematical Association of America). 『오일러: 우리 모두의 스승』. 3장에서 바젤 문제의 이야기를 수학과 함께 온전히 들려준다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** Chapter 9, "Three times $\pi^2/6$". 『하늘책의 증명』 9장 "$\pi^2/6$의 세 가지 증명". 이 절의 증명이 실려 있다.
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*** (Princeton University Press). 『오일러 박사의 놀라운 공식』. 복소수, 푸리에 급수, 그리고 이와 같은 합들을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/basel.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com