2.3 발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌

학습지

문제

STEP III 2014, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q8

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 첫 번째 부등식은 $r = k^n$부터 $r = k^{n+1} - 1$까지의 항으로 이루어진 블록에 관한 것이다. $k = 2$, $n = 3$일 때 이 블록에는 어떤 항들이 있고, 모두 몇 개인가?

1단계 블록 어림하기

다루는 내용: 첫 번째 부등식(inequality)

생각해 보기 $k = 2, n = 3$일 때 $r = k^n$부터 $r = k^{n+1} - 1$까지의 블록(block)은 어떤 항들로 이루어지며, 항은 몇 개인가? 일반적으로 한 블록에는 항이 몇 개 있는가?

잠깐, 직접 해 보기 f는 감소함수(decreasing function)이다. 블록에서 $f(r)$의 최솟값과 최댓값은 각각 무엇인가? 각각에 항의 개수를 곱하라.

2단계 조화급수

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $k=2$, $f(r)=\frac{1}{r}$로 두고 2^n부터 $2^{n+1}-1$까지의 블록에 대한 하한과 상한(bounds)을 구하라.

잠깐, 직접 해 보기 모든 블록은 적어도 같은 일정한 양만큼 기여한다. $n=0,1,\dots,N$에 대한 블록을 모두 더하라. $N\to\infty$일 때 부분합(partial sum)은 어떻게 되는가?

3단계 세제곱의 역수의 합

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 이번에는 $k = 2$는 그대로 두고 $f(r) = \frac{1}{r^3}$으로 놓는다. 블록 n의 상한은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 블록들은 모든 양의 정수를 정확히 한 번씩 덮는다. 상한들을 모두 더하라. 이것은 등비급수(geometric series)이다.

4단계 2가 없는 수 세기

다루는 내용: 소문항 (iii)

잠깐, 직접 해 보기 0부터 999까지의 모든 수를 앞자리에 0을 채우는 것(leading zeros)을 허용하여 세 자리로 쓴다(따라서 7은 007이 된다). 2를 쓸 수 없다면 각 자리에 올 수 있는 숫자는 몇 가지인가? 0을 빼는 것을 잊지 말라.

5단계 Kempner 급수

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 자릿수로 정한 블록을 사용하라. 이는 $k = 10$으로 두는 것과 비슷하다.

잠깐, 직접 해 보기 2가 들어 있지 않은 d자리 수는 몇 개인가? (첫째 자리는 0일 수 없다.) d자리 수가 가질 수 있는 가장 작은 값은 얼마인가? 각 블록이 기여하는 양의 상한을 구하고 d에 대해 모두 더하라.

숨은 수학

응집 판정법

문제의 첫 번째 부등식은 **코시**(*Cauchy*)**의 응집 판정법**(*condensation test*)의 핵심이다. f가 양수이고 감소하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\text{가 수렴한다} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n)\text{가 수렴한다.}$$

이 판정법은 어려운 급수를 쉬운 급수로 바꾸어 준다. $f(r) = 1/r^p$에 적용하면 $\sum 2^n \cdot$

$2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$을 얻는데, 이는 정확히 $p > 1$일 때 수렴하는 등비급수이다. $1/(r \ln r)$에 적용하면 이 급수조차 발산함을 알 수 있고, $1/(r(\ln r)^2)$에 적용하면 이 급수는 수렴함을 알 수 있다. 이 논증은 1350년경에 그림 2.3.1 (온라인 전체 절에 수록)의 블록과 똑같은 방법으로 조화급수의 발산을 증명한 니콜 오렘(Nicole Oresme)까지 거슬러 올라간다.

조화급수는 얼마나 느리게 발산하는가

그림 2.3.1 (온라인 전체 절에 수록)을 보면 각 블록이 약 $\ln 2$씩 기여하므로, 처음 N개 항의 합은 대략 $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$이어야 할 것 같다. 실제로

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (0\text{으로 가는 어떤 양}),$$

이며, 여기서 $\gamma = 0.5772\ldots$는 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant)이다. γ가 유리수(rational number)인지는 아무도 모른다. 이 공식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 적분을 이용해 증명하게 되며, 조화수는 Section 9.11와 Section 11.12에서 다시 등장한다.

대부분의 수에는 2가 들어 있다

Kempner 급수는 왜 수렴할까? 큰 수들 사이에서 "2가 없는 수"는 매우 드물기 때문이다. 10^d보다 작은 수 중 2가 없는 수의 비율은 많아야 $(0.9)^d$이고, 이는 0으로 간다. 100자리 수 중 숫자 2를 피하는 수는 0.003%도 되지 않는다. 그러니 우리는 항의 10분의 1을 없앤 것이 아니라 거의 전부를 없앤 것이다. 우리가 얻은 경계 80은 넉넉한 값이다. 1979년에 Robert Baillie가 가속된 방법을 써서 이 합을 소수점 아래 여러 자리까지 계산하였는데, 그 값은 약 19.257이다.

거듭제곱의 역수의 합

소문항 (ii)의 합은 $\zeta(3)$으로, Section 1.2에서 만난 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 값이다. Section 2.4에서는 $\zeta(2) = \pi^2/6$을 정확히 구할 것이며, 오일러(Euler)는 $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$에 대한 공식을 찾았다. 그러나 $\zeta(3)$에 대한 공식은 아무도 찾지 못하였다. 1978년 Roger Apéry는 Section 2.9에 나오는 것과 비슷한 적분을 이용하여 $\zeta(3)$이 무리수(irrational number)임을 증명해 수학계를 놀라게 하였다. $\zeta(5)$가 무리수인지는 아직도 알려져 있지 않다.

더 도전하기

1 **느림을 느껴 보기.** $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$를 이용하여, 조화급수가 10을 넘으려면 몇 개의 항이 필요한지, 그리고 100을 넘으려면 몇 개가 필요한지 어림하여라.

2 **판정법의 실제.** $f(r) = 1/r^2$에 소문항 (i)의 방법을 적용하여 $\sum 1/r^2 \le 2$임을 보여라. 그다음 첫째 항을 따로 다루어 경계를 개선하여라.

3 **수렴과 발산 사이.** $k = 2$인 블록 부등식을 이용하여 $\sum_{r\ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$은 발산하고 $\sum_{r\ge 2} \dfrac{1}{r(\ln r)^2}$은 수렴함을 보여라.

4 **더 많이 빼기.** 심화 십진법 표기에 2도 7도 없는 양의 정수들의 역수의 합이 35보다 작음을 보여라. (35가 어디서 나오는지 알 수 있는가?)

더 읽을거리

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). 조화급수와 γ를 비롯한 많은 내용을 실력 있는 고등학생을 위해 쓴 책이다.
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave). 급수와 비교 판정법에 관한 장이 명료한, 간결한 대학 1학년 교재이다.
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979). 이 절을 공부하고 나면 읽을 수 있는 짧은 논문이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.3절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/kempner.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com