2.2 극한으로서의 황금비

학습지

문제

STEP II 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 분자와 분모가 눈에 익은가? 소수로도 살펴보자. $1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$. 이 수열은 증가하는가? 감소하는가?

1단계 두 칸 떨어진 항끼리 비교하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $(*)$를 이용하여 $u_{n+2}-u_n$을 $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n-1}}$로 나타내고 통분(common denominator)한다.

잠깐, 직접 해 보기 $u_{n+1}-u_{n-1}$에 대해서도 같은 작업을 하고, 두 식을 결합한다. 그런 다음 $(*)$를 이용하여 분모에 있는 곱 $u_{n+1}u_n$과 $u_{n-1}u_{n-2}$를 간단히 한다.

2단계 함정

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (i)을 이용하기 전에, 모든 n에 대하여 $1 \le u_n \le 2$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. $1 \le u_n \le 2$이면 $\frac{1}{u_n}$은 얼마나 클 수 있는가?

3단계 두 개의 단조(monotone) 부분수열(subsequence)

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 소문항 (i)에 따르면 $u_{n+2} - u_n$은 $u_n - u_{n-2}$의 양수배이다. 그렇다면 $u_3 - u_1, u_5 - u_3, u_7 - u_5, \ldots$의 부호에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

생각해 보기 홀수 번째 항들은 증가하는가, 감소하는가? 짝수 번째 항들은 어떠한가? 이들은 유계(bounded)인가?

잠깐, 직접 해 보기 주어진 정리는 증가수열에 관한 것이다. 이 정리를 아래로 유계인 감소수열에는 어떻게 적용할 수 있는가?

4단계 극한(limit) 구하기

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $(*)$를 두 번 이용하여 u_{n+2}를 u_n으로 직접 나타낸다.

잠깐, 직접 해 보기 n을 홀수 값을 따라 $n \to \infty$로 보내고, 다음으로 짝수 값을 따라 보낸다. 두 극한은 같은 이차방정식(quadratic equation)을 만족한다. 어느 근인가? 그러면 왜 수열 전체가 수렴(converge)하는가?

5단계 다른 곳에서 시작하기

다루는 내용: 마지막 소문항, $u_1 = 3$에서 시작하는 경우

생각해 보기 $u_1 = 3$일 때 처음 몇 개의 항을 적어 본다. 앞에서 사용한 논증 가운데 어느 것이 여전히 성립하며, 몇 번째 항부터 성립하는가?

숨은 수학

거미줄 그림과 고정점

$u_{n+1} = f(u_n)$으로 정의된 수열은 모두 **거미줄 그림**(*cobweb diagram*)으로 나타낼 수 있다(그림 2.2.1). $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프를 그린다. x축 위의 u_1에서 출발하여 곡선까지 수직으로 올라가고(높이 $u_2 = f(u_1)$), 직선 $y = x$까지 수평으로 이동한 뒤(이로써 $x = u_2$로 옮겨 간다), 다시 곡선까지 수직으로 이동하는 과정을 되풀이한다. 여기서 $f(x) = 1 + 1/x$는 감소함수이므로, 경로는 넘쳤다가 모자랐다가를 번갈아 하며 곡선과 직선이 만나는 점, 즉 $f(\varphi) = \varphi$인 **고정점**(*fixed point*) φ를 향해 나선 모양으로 안쪽으로 감겨 들어간다.

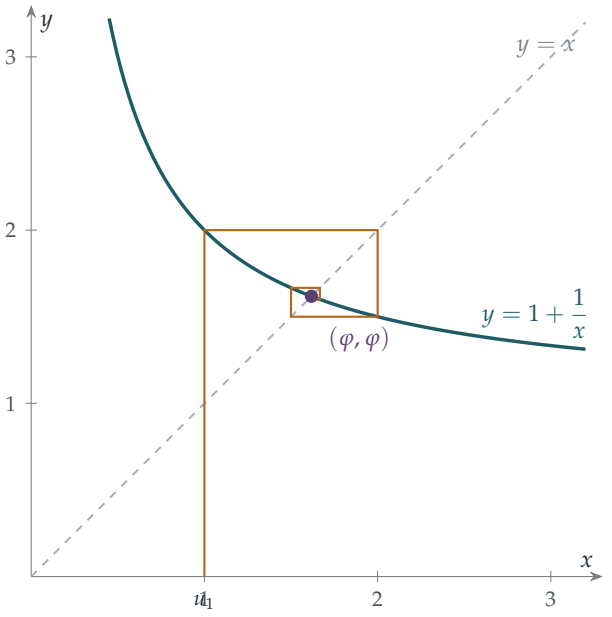

그림 2.2.1 $u_1 = 1$에서 시작하는 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$의 거미줄 그림. 경로는 곡선까지 올라갔다가 직선 $y = x$까지 가로질러 가는 과정을 되풀이한다. 곡선이 아래로 기울어 있으므로 경로는 양쪽을 번갈아 오가며 고정점 $\varphi \approx 1.618$을 향해 나선 모양으로 감겨 들어간다. 이것이 홀수 번째 항과 짝수 번째 항의 지그재그이다.

얼마나 빠르게, 그리고 왜

소문항 (i)의 인수 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$는 어디에서 왔을까? 고정점 근처에서 $u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$이고, $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$이다. 따라서 한 단계마다 오차에 약 -0.38이 곱해진다. 부호가 뒤집히고(지그재그) 크기는 줄어든다(수렴). 두 단계를 거치면 $1/\varphi^4 \approx 0.146$이 곱해지는데, 이것이 바로 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$이 수렴하는 값이다. 대학에서는 이것이 **축소 사상 정리**(*contraction mapping theorem*)가 된다. 고정점 근처에서 $|f'| \le k < 1$이면 반복은 그 고정점으로 수렴하며, 오차는 적어도 기하급수적으로 줄어든다. 이 정리는 수학에서 가장 유용한 정리 중 하나이며, 미분방정식이 해를 가짐을 증명하는 방법이기도 하다(제8장). Section 2.8에서는 고정점이 끌어당기지 **않는** 사상을 만나게 되는데, 그 결과는 사뭇 다르다.

가장 무리수다운 수

항 $u_n = F_{n+1}/F_n$은 크기에 비해 φ에 대한 가장 좋은 분수 근삿값이지만, 그 "가장 좋다"는 것이 그리 좋지는 않다. φ는 다른 어떤 수보다도 분수로 근사하기 어렵다. 그 이유는 연분수(continued fraction) 표현 $[1;1,1,1,\ldots]$에서 볼 수 있다. 연분수에 큰 항이 있으면 매우 좋은 근삿값이 생기는데($\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$와 훌륭한 근삿값 $\frac{355}{113}$을 떠올려 보라), φ는

끝까지 가능한 가장 작은 항만 가진다. 아돌프 후르비츠(Adolf Hurwitz)는 1891년에 모든 무리수(irrational number) x에 대해 $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$을 만족하는 분수가 무한히 많으며, 바로 φ 때문에 $\sqrt{5}$를 더 개선할 수 없음을 증명했다. 이 "최대 무리성"이 해바라기 씨의 나선 무늬에 황금각(golden angle)이 나타나는 이유이다.

더 도전하기

1 **속에 숨은 피보나치.** $F_1 = F_2 = 1$이고 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$일 때 $u_n = F_{n+1}/F_n$임을 증명하여라.

2 **줄어드는 오차.** $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$임을 보이고, 이로부터 모든 n에 대해 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$임을 유도하여라. ($\varphi^2 = \varphi + 1$과 $u_n \ge 1$을 이용하여라.)

3 **수열 망가뜨리기.** $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$이면 수열이 상수임을 보여라. 어떤 $u_n = 0$이 되어 수열을 더 이어 갈 수 없게 되는 시작값 u_1을 모두 구하여라. (**힌트:** $u_n = 0$에서 거꾸로 거슬러 올라가 보아라.)

4 **$\sqrt{2}$의 사촌.** $v_1 = 1$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$이라 하자. 이 문제의 방법을 응용하여 $v_n \to \sqrt{2}$임을 보이고, $\sqrt{2}$를 연분수로 나타내어라.

더 읽을거리

- **Mario Livio, *The Golden Ratio*** (Broadway). φ의 역사를 다루며, 진짜 수학과 수많은 신화를 구별한다.
- **C. D. Olds, *Continued Fractions*** (Mathematical Association of America). 실력 있는 고등학생을 대상으로 한, 짧고 매우 읽기 쉬운 연분수 입문서.
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis*** (Cambridge University Press). 단조수열과 완비성을 엄밀하게 다루며, 연습문제가 많다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.2절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/golden-limit.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com