2.1 “결국”이란 무슨 뜻인가

학습지

문제

STEP III 2015, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q2

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** 정의에는 "양의 정수 m이 존재한다"라는 구절이 들어 있다. $(s_n) \le (t_n)$임을 증명하려면 정확히 무엇을 제시해야 하는가? 그것이 **거짓**임을 증명하려면 무엇을 보여야 하는가?

1단계 일차함수(linear function)와 이차함수(quadratic function)의 비교

다루는 내용: 소문항 (i)

> **생각해 보기** 처음 몇 항은 중요하지 않다. 어떤 n에 대해 $1000n \le n^2$인가? 양변을 양수인 n으로 나누어라.

2단계 “결국 더 작다(eventually smaller)”는 보통의 “더 작다”와 같은가?

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 “$(s_n) \leq (t_n)$인 것은 아니다”를 “아니다”라는 말을 쓰지 않고 완전히 풀어 써 보아라. $s_n > t_n$은 얼마나 자주 일어나야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 양수로 이루어진 두 수열(sequence)이 끝없이 서로 자리를 바꾸어서, 어느 쪽도 다른 쪽보다 결국 더 작다고 할 수 없는 예를 찾아보아라.

3단계 이어 붙이기

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 각 가정(hypothesis)에는 저마다의 m이 따라오며, 그 값들은 서로 다를 수 있다. 이를 m_1, m_2라 하자.

잠깐, 직접 해 보기 어떤 하나의 m 값을 택하면 모든 $n \geq m$에 대해 두 부등식(inequality)이 모두 성립하는가?

4단계 **이차함수와 지수함수(exponential function)의 비교**

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 $n = 1, \ldots, 8$에 대해 n^2과 2^n의 표를 만들어 보아라. 어디서부터 $n^2 \le 2^n$이 성립하는 것처럼 보이는가?

잠깐, 직접 해 보기 수학적 귀납법(induction)으로 증명하라. $n^2 \le 2^n$에서 $(n+1)^2 \le 2 \cdot 2^n$을 이끌어 내려면 $(n+1)^2 \le 2n^2$임을 알면 충분하다. 이것은 어떤 n에 대해 참인가?

숨은 수학

해석학의 언어

뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz) 이후 약 150년 동안 수학자들은 극한(limit)과 무한소(infinitesimal)를 훌륭하게 사용했지만, 그것이 정확히 무엇을 뜻하는지는 말하지 못했다. 버클리(Berkeley) 주교는 1734년에 무한소를 “죽은 양의 유령”이라고 조롱했는데, 그의 말에는 일리가 있었다. 이 문제는 19세기에 해결되었다. 오귀스탱루이 코시(Augustin-Louis Cauchy)와 이어서 카를 바이어슈트라스(Karl Weierstrass)가 “무한

히 가까워진다"는 모호한 말을 "모든"과 "존재한다"로 이루어진 명제로 바꾸어 놓은 것이다. 현대적인 정의

$$a_n \to L \iff \text{임의의} \varepsilon > 0 \text{에 대하여 어떤} N\text{이 존재하여} |a_n - L| < \varepsilon \text{이 다음 모든 경우에 성립: } n \geq N$$

는 이 문제의 정의와 정확히 같은 모양이고, 맨 앞에 양화사가 하나 더 붙어 있을 뿐이다. 이것이 대학 해석학 강의에서 가장 먼저 만나게 될 내용이다.

증가의 차수

소문항 (iv)는 유명한 사다리의 작은 한 칸이다. 고정된 임의의 $k > 0$과 $c > 1$에 대하여

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

이고, 사실 각 수열은 다음 수열보다 결국에는 작을 뿐 아니라 다음 수열의 **어떤 상수배**보다도 결국에는 작다. G. H. 하디(G. H. Hardy)는 이런 종류의 비교에 관해 *Orders of Infinity*(1910, 무한의 차수)라는 책 한 권을 통째로 썼다. 오늘날 이것은 컴퓨터 과학의 일상 언어가 되었다. 컴퓨터 과학에서 "이 알고리즘은 $O(n^2)$ 단계가 걸린다"라는 말은 단계의 수가 결국에는 n^2의 상수배 이하라는 뜻이다. n^2과 2^n의 차이는 끝나는 프로그램과 태양이 다 타 버리기 전까지 끝나지 않을 프로그램의 차이이다.

전순서가 아닌 순서

소문항 (ii)는 "결국에는 더 작다"가 **전순서**(total order)가 아님을 보여 준다. 즉 아예 비교할 수 없는 수열 쌍이 있다. 이처럼 추이적이지만 모든 것을 비교하지는 못하는 관계를 **원순서**(preorder) 또는 **부분순서**(partial order)라고 하며, 이런 관계는 어디에서나 나타난다. 정수의 나누어떨어짐, 집합의 포함 관계, "부분군이다"가 모두 그 예이다. 어떤 관계가 어떤 성질을 가지고 어떤 성질을 가지지 않는지 알아보는 것은 수학자가 받는 훈련의 일부이다.

더 도전하기

1 **견본 문제로 몸풀기.** 1987년 첫 STEP 이전에 발표된 시험지의 STEP III Specimen paper, 2번 문제 (step.maths.org/questions/spec-s3-q2)를 풀어 보자. (**마지막 부분에 대한 힌트:** 이항전개(binomial expansion)의 다음 항을 이용한다.)

2 **양쪽 방향.** $(s_n) \leq (t_n)$이고 $(t_n) \leq (s_n)$이면 충분히 큰 모든 n에 대하여 $s_n = t_n$임을 증명하여라.

3 **무한대를 향한 경주.** 둘 다 무한대로 발산하고 어느 쪽도 결국에는 다른 쪽보다 작다고 할 수 없는, 양수로 이루어진 두 **증가** 수열을 찾아라.

4 **사다리 오르기.** 명시적인 m을 제시하여 $(2^n) \leq (n!)$임을 보여라. 그다음 $(n^{10}) \leq (2^n)$임을 보이고, 통하는 가장 작은 m을 찾아라. (두 번째 부분에는 스프레드시트가 도움이 된다. 답은 놀라울 만큼 크다.)

더 읽을거리

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree*** (Oxford University Press). 수학과 공부하는 법. 3장이 바로 이런 종류의 논리적 언어와, 대학 신입생들이 그것을 어려워하는 이유를 다룬다.
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis*** (Oxford University Press). 해석학을 생각하는 법. 대학 1학년 해석학의 정의들을 친절하게 안내한다.
- **Daniel Velleman, *How to Prove It*** (Cambridge University Press). 증명하는 법. 논리, 양화사, 증명을 체계적으로 소개한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 2.1절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/eventually.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com