12.8 페니의 게임

학습지

문제

STEP III 2001, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q13

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 지금까지 던진 결과가 TT로 끝났고 아직 아무도 이기지 않았다고 하자. THH가 TTH보다 먼저 나타날 수 있을까?

1단계 상태

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** TT가 한 번 나타나고 나면 THH가 TTH보다 먼저 나올 수 있는가? 그다음, 마지막 두 번의 던지기 결과가 XY일 때 A가 이길 확률(probability)을 p_{XY}라 하자. 네 가지 상태(state) 각각에 대하여 방정식을 세운다.

2단계 풀기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 네 방정식을 푼다. 처음 두 번 던진 결과로 나오는 각 쌍의 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

3단계 B 대 C

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 C는 HHT를, B는 THH를 원한다. 게임이 HH로 시작하면 누가 이기는가? 그렇지 않다면, 처음 나오는 HH 바로 앞에 무엇이 오는지 살펴본다.

4단계 순환

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 C 대 D의 경우에는 소문항 (i)에서처럼 상태를 설정한다. D 대 A의 경우에는 소문항 (ii)에서 앞면(heads)과 뒷면(tails)을 서로 바꾼다.

숨은 수학

어떤 수열이 더 유리한 이유

세 번 던지기의 모든 수열은 주어진 어느 위치에서나 나타날 확률이 같고, 각 수열이 나타날 때까지의 기대 대기 시간은 쉽게 계산할 수 있다. 그러나 대기 시간은 서로 다르다. TTH는 평균 8번, TTT는 평균 14번을 기다려야 하는데, 자기 자신과 겹치는 수열(TTT처럼, 아깝게 빗나간 TTH가 두 번 던지기만큼의 진행을 망쳐 버리는 경우)은 늦게 나타나기 때문이다. 그리고 두 수열의 경주에서 중요한 것은 각 수열이 **상대** 수열과 어떻게 겹치느냐이다. THH가 HHT를 이기는 까닭은, HHT가 나타날 때마다(맨 처음인 경우를 제외하고) 그 앞에 T가 있고, 이는 THH가 막 나타났다는 뜻이기 때문이다. 두 번째 선수의 비결은 언제나 같다. 상대 수열의 처음 두 기호를 가져와서, 그 앞에 상대 수열의 가운데 기호와 반대인 기호를 붙이면 된다.

콘웨이의 공식

콘웨이(John Conway)는 승산에 대한 놀라운 공식을 발견했다. 길이가 n인 두 수열 X와 Y에 대하여 **상관**(*correlation*) XY를 n자리 이진수로 정의한다. 왼쪽부터 읽을 때, X의 i번째 기호에서 시작하는 부분이 같은 길이의 Y의 앞부분과 같으면 i번째 자리를 1로 둔다. 그러면 Y가 X보다 먼저 나타날 승산은

$$(XX - XY) : (YY - YX).$$

이다. $X = \text{HHT}$, $Y = \text{THH}$인 경우, $XX = 100_2 = 4$(HHT 전체만이 자기 자신과 일치한다), $XY = 001_2 = 1$(HHT의 마지막 T만이 THH의 앞부분과 일치한다), $YY = 100_2 = 4$,

$YX = 011_2 = 3$(THH 끝의 HH와 H가 모두 HHT의 앞부분과 일치한다)이다. 따라서 THH가 먼저 나올 승산은 $(4-1) : (4-3) = 3 : 1$이고, 이것이 3단계의 $\frac{3}{4}$이다. 콘웨이의 공식은 길이와 알파벳에 관계없이 모든 수열에 대해 성립하며, 그 증명에는 **마팅게일**(*martingale*) 이론이 쓰인다. 도박꾼들이 수열이 나타나는 데 돈을 거는 카지노를 상상하고, 공정한 게임의 기대 이익은 0이라는 사실을 이용하는 것이다.

Penney와 가드너

Walter Penney는 1969년 *Journal of Recreational Mathematics*에 실린 짧은 글에서 이 게임을 소개했다. 마틴 가드너(Martin Gardner)는 1974년 *Scientific American*의 칼럼에서 이 게임을 널리 알렸는데, 여기에는 콘웨이가 발견했지만 발표하지 않았던 콘웨이의 공식도 포함되어 있었다. 이런 종류의 비추이적 관계(주사위 A가 B를, B가 C를, C가 D를, D가 A를 이기는 에프론(Efron)의 주사위도 그 예이다)는 거듭 놀라움을 주는 대상이며, 다수의 선호가 순환을 이룰 수 있는 투표 이론에서도 중요하다. 이것이 콩도르세(Condorcet)의 역설이다.

더 도전하기

1 **네 명이 함께.** STEP II 2015, 12번 문제 (step.maths.org/questions/15-s2-q12)에 도전해 보라. 네 명이 동시에 하는 페니 게임이다.

2 **대기 시간.** HH가 처음 나타날 때까지 던지는 횟수의 기댓값이 6이고, HT의 경우는 4임을 보여라. (첫걸음 분석을 이용하라.)

3 **최선의 응수.** 길이가 3인 여덟 개의 수열 각각에 대하여, 그것을 가장 큰 확률로 이기는 수열을 구하라. 어느 수열이 가장 쉽게 지는가?

4 **콘웨이의 공식.** 콘웨이의 공식을 이용하여 HHT가 HTT를 확률 $\frac{2}{3}$으로 이긴다는 것을 확인하라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*** (W. H. Freeman). 페니 게임과 콘웨이의 공식이 실려 있다.
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 8.4절. 생성함수를 이용한 페니 게임.
- **David Williams, *Probability with Martingales*** (Cambridge University Press). 마팅게일을 이용한 증명. 나중을 위한 책이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/penney.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com