12.7 토너먼트에서 누가 누구와 만나는가

학습지

문제

STEP II Specimen paper, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q16

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 2^n명의 선수가 참가하는 녹아웃 토너먼트(knockout tournament)에서는 몇 경기가 열리는가? (각 경기에서 선수 한 명이 탈락한다.)

1단계 첫 번째 라운드

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 첫 번째 라운드에서 첫 번째 선수의 상대는 나머지 선수 중 누구든 같은 확률(probability)로 정해진다. 나머지 선수는 몇 명인가?

2단계 핵심 대칭성

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 모든 대진 추첨은 무작위이고 모든 경기는 공정한 동전 던지기로 결정된다. 이 과정에서 어떤 두 선수 쌍이 다른 쌍과 다르게 취급되는 일이 있는가? 그렇다면 어느 한 특정한 경기가 주어진 두 선수 사이의 경기일 확률은 얼마인가?

3단계 결승전

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 결승전은 경기 하나이므로 두 번째 단계를 이용한다. 라운드 r에는 2^{n-r}개의 경기가 있고, 두 선수는 한 라운드에서 많아야 한 번 만날 수 있다. 그렇다면 두 선수가 라운드 r에서 만날 확률은 얼마인가?

4단계 어느 단계에서든

다루는 내용: 소문항 (iii)

> ? **생각해 보기** 두 선수는 많아야 한 번 만날 수 있으므로 사건 "라운드 r에서 만난다"들은 서로 배반(mutually exclusive)이다. 이 확률들을 모두 더하거나, $2^n - 1$개의 경기 전체를 한꺼번에 센다.

숨은 수학

개수의 기댓값

단계 4의 논증은 사실 기댓값(expectation) 계산이다. X와 Y가 만나는 횟수는 경기마다 하나씩인 지시변수(indicator)들의 합이고, 그 기댓값(이 횟수는 0 또는 1이므로 만날 확률과 같다)은 지시변수들의 기댓값의 합이다. 이것이 기댓값의 선형성(linearity of expectation)이며, Section 9.11와 Section 12.4에서도 사용되었다. 이 방법의 큰 장점은 라운드 사이의 복잡한 종속 관계를 전혀 신경 쓰지 않아도 된다는 것이다.

시드가 배정된 토너먼트

실제 토너먼트에는 **시드**(*seed*)가 배정된다. 가장 강한 선수들은 후반 라운드가 되기 전에는 서로 만나지 않도록 배치된다. 또 실제 경기는 50–50이 아니다. 두 가지 모두 대칭성을 깨뜨리므로, 주어진 두 선수가 만날 확률을 구하는 일은 진짜 계산이 된다. 스포츠를 모형화하는 통계학자들은 선수들의 레이팅으로부터 각 경기의 확률을 추정하여 바로 이런 계산으로 토너먼트 결과를 예측한다. 대칭적인 경우는 실제 효과를 측정하는 기준선이 된다.

더 도전하기

1 **라운드별로.** X와 Y가 라운드 k에서 만날 확률이 $\frac{2^{n-k}}{\binom{2^n}{2}}$임을 직접 보이고, 이를 모두 더하면 $\frac{1}{2^{n-1}}$이 됨을 확인하여라.

2 **고정된 대진표.** 대신 대진표를 (그림처럼) 미리 고정해 두고 모든 선수를 그 안에 무작위로 배치한다면 답이 달라지는가?

3 **강한 선수.** 선수 X가 모든 경기에서 이긴다고 하자. 이제 X가 Y를 만날 확률은 얼마인가?

4 **리그.** 모든 쌍이 한 번씩 맞붙는 $2n$개 팀의 리그(league)에서는 몇 경기가 열리는가? 이에 대응하는 "만날 확률"은 무엇인가?

더 읽을거리

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 토너먼트 문제가 실려 있다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 모형화와 예측에 관한 책이다.
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press; 온라인 무료 공개). 지시변수와 대칭성을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.7절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/knockout.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com