12.6 동전 하나 더

학습지

문제

STEP I 2016, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s1-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 앨리스가 동전을 두 번 던질 때, 앨리스가 얻는 앞면의 개수의 분포(distribution)는 무엇인가? 밥이 세 번 던질 때는 어떠한가?

1단계 무식하게 계산하기

다루는 내용: 소문항 (i)과 (ii)

> ? **생각해 보기** Alice와 Bob이 얻는 앞면 개수의 분포(distribution)를 각각 적어 본다. Alice의 앞면 개수에 따라 경우를 나누어 모두 더한다.

2단계 Bob의 던지기 나누기

다루는 내용: 소문항 (iii)

> **잠깐, 직접 해 보기** Bob의 $n+1$번 던지기를 n번 던진 뒤 한 번 더 던지는 것으로 생각한다. 둘 다 n번씩 던진 시점에서 Bob은 앞서 있거나, 같거나, 뒤처져 있다. 각 경우에 추가로 던지는 한 번은 어떤 역할을 하는가? Alice와 Bob 사이의 대칭성(symmetry)을 이용한다.

숨은 수학

대칭과 여사건

이 깔끔한 증명은 두 가지 사실을 결합한다. 대칭에 의해 서로 맞바뀌는 두 사건은 확률이 같고, 서로 여사건인 두 사건은 확률의 합이 1이다. 두 조건이 모두 성립하면 각 사건의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 같은 추론이 확률론 곳곳에 등장한다. 비행기 좌석 문제(Section 12.5)에서 S_1과 S_n은 대칭에 의해 맞바뀌었고, 마지막에 남는 것은 정확히 둘 중 하나였다. 헥스(Hex) 게임에서는 판의 대칭성과 반드시 정확히 한 명이 이긴다는 사실로부터 선수가 유리함을 보일 수 있지만, 큰 판에서의 필승 전략은 아무도 모른다.

비길 확률은 얼마나 될까?

던지는 횟수가 같을 때는 비길 확률 p_1이 중요하다. 앨리스와 밥은 앨리스의 앞면 수가 밥의 앞면 수와 같을 때 비기는데, 이는 (대칭에 의해 밥의 앞면 수를 뒷면 수로 바꾸면) 앨리스의 앞면 수와 밥의 앞면 수의 합이 n일 확률, 즉 $2n$번 던져서 앞면이 모두 n개 나올 확률과 같다. 따라서 스털링(Stirling) 근사(Section 12.23)를 이용하면

$$p_1 = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

이다. 비기는 일은 드물어지지만 그 속도는 느리다. 각자 100번씩 던져도 비길 확률은 여전히 약 5.6%이다.

더 도전하기

1 **동전 두 개 더.** 밥이 동전을 $n+2$개, 앨리스가 n개 던질 때, H'을 밥의 처음 $n+1$번 던지기에서 나온 앞면의 개수라 하면 $\mathrm{P}(\text{밥이 앞면을 더 많이 얻음}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$임을 증명하여라.

2 **편향된 동전.** 두 사람 모두 앞면이 나올 확률이 p인 동전을 사용한다면, 한 번 더 던질 때 답은 여전히 $\frac{1}{2}$인가? 깔끔한 증명의 어느 단계가 성립하지 않는가?

3 **비기기.** 본문의 요령을 이용하여 $p_1 = \binom{2n}{n}/4^n$임을 보이고, $n = 1, 2, 3$일 때 그 값을 계산하여라.

4 **주사위.** 앨리스는 주사위 n개를, 밥은 $n+1$개를 던진다. 밥이 6의 눈을 더 많이 얻을 확률은 $\frac{1}{2}$인가?

더 읽을거리

- **Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders*** (A K Peters). 대칭을 이용한 풀이가 있는 확률 퍼즐이 많이 실려 있다.
- **Gabor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel). 확률론과 수리통계학의 역설.
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 확률의 도전적인 문제 50선.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.6절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/one-more-coin.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com