12.5 마지막 승객의 좌석

학습지

문제

STEP II 2021, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 일어날 수 있는 경우를 모두 나열하여 P_2와 P_3을 구하여라.

1단계 점화식

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 T_1이 $2 \le k \le n-1$인 S_k에 앉는다고 하자. $T_2, \ldots, T_{k-1}$은 어떻게 하는가? T_k가 도착했을 때 비어 있는 자리는 어느 것인가? 이것이 왜 자리 수가 더 적은 원래 문제와 같은가?

생각해 보기 이제 T_1이 어느 자리에 앉는지에 따라 조건부(condition on)로 나누어 생각한다. 각 경우의 확률(probability)은 $\frac{1}{n}$이다.

2단계 답

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 P_2와 P_3은 이미 알고 있다. P_n을 추측하고, 앞에서 구한 점화식(recurrence)을 이용하여 강한 수학적 귀납법(strong induction)으로 증명한다.

3단계 끝에서 두 번째 승객

다루는 내용: 소문항 (iv)

> **잠깐, 직접 해 보기** 마지막 승객에게 남을 수 있는 자리는 어느 것인가? T_{n-1}의 경우, 자기 자리가 S_1보다 먼저 선택될 때에만 자리를 잃는다. 자리를 빼앗긴 승객들이 고르는 자리들 가운데 S_1, S_{n-1}, S_n은 똑같이 취급되는가? $n = 2$인 특수한 경우도 잊지 말자.

숨은 수학

대칭 논증

두 번째 증명은 확률론의 강력한 아이디어의 한 예이다. 두 결과가 무작위 과정의 대칭으로 서로 연결되어 있으면 두 결과의 확률은 같다. 여기서의 과정은 S_1과 S_n 중 하나가 선택될 때까지 둘을 구별하지 않으므로, 둘이 끝까지 남을 가능성은 같아야 한다. 대칭 논증은 긴 계산을 단 하나의 관찰로 대신하는 경우가 많다. 다음 몇 절에도 이런 논증이 가득하다. Section 12.6의 동전 한 번 더 던지기, Section 12.7의 토너먼트 대진 추첨이 그렇다.

자리를 빼앗기는 승객은 몇 명인가?

자리를 빼앗기는 승객(자기 자리에 앉지 못하는 승객)의 수도 깔끔하게 다룰 수 있다. T_1은 S_1을 고르지 않는 한 자기 자리에 앉지 못하고, $T_k (k \geq 2)$는 확률 $\frac{1}{n-k+2}$로 자리를 빼앗긴다. 이를 더하면 자리를 빼앗기는 승객 수의 기댓값(expected value)은

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = H_n - \frac{1}{n},$$

으로, 대략 $\ln n$이다. 300명이 탄 비행기에서도 혼란은 평균적으로 겨우 여섯 명 정도에게만 영향을 미친다. 여기서도 조화수(harmonic number)가 등장한다(Section 9.11).

더 도전하기

1 **건망증 있는 두 승객.** 처음 두 승객이 모두 무작위로 자리를 고른다면, 마지막 승객이 자기 자리에 앉을 확률은 얼마인가?

2 **자리를 빼앗기는 승객.** $n = 3$일 때 가능한 경우를 모두 나열하여 자리를 빼앗기는 승객 수의 기댓값을 확인하여라.

3 **우회로.** 점화식을 이용하여 $\sum_{r=2}^{n-1} P_r = \frac{n-2}{2}$가 대칭 논증과 모순되지 않음을 보여라.

4 **마지막 좌석.** 마지막 승객이 자기 자리에 앉지 못했다는 조건 아래에서, 마지막 승객이 S_1에 앉을 확률이 1임을 보여라. 왜 그런가?

더 읽을거리

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection*** (A K Peters). 수학 퍼즐 모음집. 비행기 좌석 퍼즐을 비롯하여 대칭으로 풀리는 여러 퍼즐이 실려 있다.
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 확률 문제 50선. 고전적인 문제 모음집이다.
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability*** (CRC Press; 온라인 무료 공개). 확률론 입문서.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/airline-seat.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com