12.3 “무작위”란 무슨 뜻인가?

학습지

문제

STEP III 2022, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 각 AOB가 θ일 때 현 AB의 길이는 얼마인가? (O에서 수선을 내려 보자.)

1단계 원 위의 두 점

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 각 AOB를 θ라 하면, O에서 수선(perpendicular)을 내려 AB를 구한다. 각 θ는 $[0, 2\pi]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 이제 적분한다.

2단계 내부의 무작위 점

다루는 내용: 소문항 (ii), R의 밀도

? **생각해 보기** $\mathrm{P}(R \le r)$는 두 넓이의 비이다. 이를 미분하여 확률밀도함수(density)를 구한다.

? **생각해 보기** C를 지나는 현(chord)이 OC와 각 t를 이룬다. 이 현은 O에서 얼마나 떨어져 있는가? 그렇다면 현의 길이는 얼마인가?

3단계 C에 대한 평균

다루는 내용: 소문항 (ii), $\mathrm{L}(t)$ 구하기

잠깐, 직접 해 보기 $s = \sin t$를 고정한 채로, 현의 길이에 R의 밀도를 곱하여 적분한다. 그다음 $1-\cos^3 t$와 $1-\cos^2 t$를 인수분해(factorise)하고, $1+\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2}$를 이용한다.

4단계 방향까지 무작위로

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 T는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 균등분포를 따른다. $\mathrm{L}(t)$의 두 번째 꼴을 적분한다. $\tan\frac{t}{2}$의 도함수(derivative)는 무엇인가?

숨은 수학

베르트랑의 세 가지 답

베르트랑이 원래 던진 질문은 다음과 같았다. 무작위 현이 원에 내접하는 정삼각형(inscribed equilateral triangle)의 한 변 $\sqrt{3}a$보다 길 확률은 얼마인가? 그는 세 가지 방법과 세 가지 답을 제시했다.

- 무작위 양 끝점: 한 끝점을 고정하면, 다른 끝점이 원의 가운데 3분의 1 부분에 있을 때 현이 길다. 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
- 무작위 반지름과 그 위의 무작위 점을 중점으로: 현이 O로부터 $\frac{a}{2}$보다 가까이 있으면 현이 길다. 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- 원판 전체에서 고른 무작위 중점: 중점이 O로부터 $\frac{a}{2}$ 이내에 있으면 현이 길다. 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

각 방법은 현들의 집합 위에 주어진 서로 다른 확률분포이며, 여기에 모순은 없다. 세 방법은 서로 다른 질문에 답하고 있을 뿐이다. 교훈은 “균등하게 무작위로”라는 말이 어떤 매개화(parametrisation)를 택했는지에 상대적으로만 의미가 있으며, 연속적인 집합에서는 대개 유일하게 자연스러운 매개화가 존재하지 않는다는 것이다.

정답이 있을까?

1973년 물리학자 Edwin Jaynes는 원을 조금 옮기거나 크기를 조금 바꾸어도 답이 변하지 않아야 한다는 근거로 두 번째 방법이 "올바른" 방법이라고 주장했다. 무작위 현이란 바닥에 그린 원 위로 빨대를 던지는 것과 같아야 한다는 것이다. 중심으로부터의 거리가 균등한 분포만이 이러한 불변성(invariance)을 가지며, 빨대를 던지는 실험도 $\frac{1}{2}$를 확인해 준다. 올바른 분포란 상황의 대칭성을 존중하는 분포라는 같은 생각이 무작위 직선의 수학인 **적분기하학**(*integral geometry*)의 바탕에 깔려 있으며, 이것은 Section 12.20의 뷔퐁(Buffon)의 바늘 문제도 설명해 준다.

역설에서 공리로

베르트랑은 *Calcul des probabilités*(1889)에서 현의 역설을 발표했는데, 부분적으로는 그가 보기에 부주의한 "기하학적 확률"의 사용을 비꼬기 위해서였다. 푸앵카레(Henri Poincaré)도 이 역설을 논의했다. 1900년 힐베르트(David Hilbert)는 새 세기를 위한 유명한 문제 목록에 확률론의 공리화(axiomatisation)를 포함시켰고, 콜모고로프(Andrey Kolmogorov)가 1933년에 이를 해결했다. 확률은 결과들의 공간 위의 측도이며, "무작위" 대상에 관한 모든 질문은 먼저 어떤 공간과 어떤 측도를 쓰는지 밝혀야 한다. 베르트랑의 역설은 왜 이것이 필요한지를 보여 주는 대표적인 예이다.

더 도전하기

1 **베르트랑의 확률.** 위의 세 확률 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$를 확인하라.

2 **또 하나의 평균.** 현의 중점을 원판에서 균등하게 고르면(오른쪽 그림) 길이의 기댓값이 $\frac{4a}{3}$임을 보여라. (**힌트:** 이것은 $L(\frac{\pi}{2})$이다. 왜 그런가?)

3 **무작위 거리.** O에서 현까지의 거리가 $[0, a]$에서 균등분포를 따르면 길이의 기댓값이 $\frac{\pi a}{2}$임을 보여라.

4 **세 방법, 세 분포.** 세 방법 각각에 대해 $[0, 2a]$에서 현의 길이 ℓ의 확률밀도를 구하라.

더 읽을거리

- **Edwin Jaynes, "The well-posed problem"**, *Foundations of Physics* 3 (1973). 불변성 논증을 담은 글로, 읽기 쉽고 도발적이다.
- **Gábor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel). 베르트랑의 역설을 비롯한 많은 역설을 다룬다.

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press). 적분기하학을 다룬 책으로, 나중에 읽어 볼 만하다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.3절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/bertrand.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com