12.21 막대 부러뜨리기

학습지

문제

STEP III 1990, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q16

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 세 길이로 삼각형을 만들 수 있을 필요충분조건은 각 길이가 나머지 두 길이의 합보다 작은 것이다. 세 길이의 합이 L이라면, 이 조건은 가장 긴 길이에 대해 무엇을 말해 주는가? 변 c의 대각은 언제 둔각인가?

1단계 한 번 자르고, 반으로 나누기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 합이 1인 세 길이가 삼각형을 이루는 것은 각 길이가 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 그리고 그때뿐이다. 이것이 X에 대해 무엇을 말해 주는가?

잠깐, 직접 해 보기 이 삼각형은 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. X의 대각이 둔각(obtuse angle)이 되는 것은 언제인가? 코사인법칙(cosine rule)을 이용하라. 삼각형이 만들어진다는 조건 아래에서 X는 $[0, \frac{1}{2}]$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

2단계 두 번째 작도

다루는 내용: 소문항 (ii), 작도와 조건

? **생각해 보기** 주어진 영역에서 세 변의 길이가 x, y, $2-x-y$일 때 세 가지 삼각부등식(triangle inequality)을 확인하라.

? **생각해 보기** B에서의 각은 길이가 y인 변의 대각이다. 이 각이 둔각이 될 조건을 y에 대한 부등식으로 나타내라.

3단계 넓이

다루는 내용: 소문항 (ii), 확률

> **잠깐, 직접 해 보기** $x^2 - 2x + 2$를 $2 - x$로 나누어라. 영역 가운데 곡선 위쪽 부분의 넓이를 구하고, 이를 전체 영역의 넓이로 나누어라.

숨은 수학

고전적인 부러진 막대 문제

막대를 서로 독립인 두 균등분포 점 U와 V에서 부러뜨린다. 순서쌍 (U, V)는 단위정사각형 위의 균등분포를 따르고, 세 조각이 삼각형을 이루는 것은 정확히 각 조각이 $\frac{1}{2}$보다 짧을 때이다. 이 조건은 넓이의 합이 $\frac{3}{4}$인 작은 삼각형 네 개를 잘라 내므로 확률은 $\frac{1}{4}$가 남는다. 삼각형이 만들어진다는 조건 아래에서 예각삼각형일 확률은 $\frac{1}{4}$ 가운데 $3\ln 2 - 2 \approx 0.079$, 즉 약 32%이다. 이 조각들은 **균등 무작위 분할**(*uniform random partition*)의 한 예이며, 그 결합분포는 **디리클레 분포**(*Dirichlet distribution*)이다. 디리클레 분포는 베이즈 통계학(Bayesian statistics)과 자원이 무작위로 나뉘는 방식을 다루는 모형에 등장한다.

막대를 부러뜨리는 방법이 중요하다

문제의 두 방법이 비슷하게 들리는 질문에 대해 서로 다른 답 $3 - 2\sqrt{2}$와 $3 - 4\ln 2$를 내며, 둘 다 고전적인 방법과도 다르다는 점에 주목하라. 베르트랑(Bertrand)의 현 문제(Section 12.3)에서처럼, 절차를 명시하기 전까지 "무작위"라는 말은 아무 의미가 없다.

무작위 삼각형

무작위 삼각형에 관한 문제는 빅토리아 시대에 인기 있던 퍼즐이었다. 루이스 캐럴(Lewis Carroll)의 *Pillow Problems*(1893)는 "무작위로" 고른 삼각형이 둔각삼각형일 확률을 묻는데, 그의 답도 이 절의 답들처럼 그가 택한 무작위성 모형에 전적으로 달려 있다. 무작위

삼각형에 관한 문제는 그 뒤로도 계속 놀라움을 낳았다. 예를 들어 정사각형 안에서 균등하게 고른 세 점이 둔각삼각형을 이룰 확률은 약 0.725인데, 이 값은 20세기에 들어서야 정확히 계산되었다.

더 도전하기

1 **고전적인 문제.** 막대를 서로 독립인 두 균등분포 점에서 부러뜨릴 때, 조각들이 삼각형을 이룰 확률이 $\frac{1}{4}$임을 보여라.

2 **긴 조각을 부러뜨리기.** 막대를 균등분포 점에서 부러뜨린 다음, 더 긴 조각을 균등분포 점에서 부러뜨린다. 세 조각이 삼각형을 이룰 확률이 $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$임을 보여라.

3 **예각인가 둔각인가.** 소문항 (ii)에서 삼각형 ABC가 C에서($AB = 2 - x - y$의 대각) 둔각을 가질 확률을 구하라. 이를 이용하여 삼각형이 어딘가에 둔각을 가질 확률을 구하라.

4 **가장 긴 조각의 기댓값.** 고전적인 부러진 막대 문제에서 가장 긴 조각의 길이의 기댓값(expected value)이 $\frac{11}{18}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics*** (Norton). 부러진 막대 문제가 실려 있다.
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability*** (Dover). 확률에 관한 도전적인 문제 50선.
- **Lewis Carroll, *Pillow Problems*** (Dover, *A Tangled Tale*과 합본). 무작위 삼각형을 포함한 빅토리아 시대의 퍼즐들.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.21절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/broken-stick.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com