12.20 뷔퐁의 바늘

학습지

문제

STEP I 1993, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q16

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 핀의 중심은 가장 가까운 선에서 거리 x만큼 떨어져 있고, 핀은 선들의 수선과 각 y를 이룬다. 핀은 선 쪽으로 얼마나 멀리 뻗어 있는가?

1단계 적분

다루는 내용: 적분

? **생각해 보기** $\int_0^1 \cos^{-1} t \, dt$에서 $t = \cos y$로 치환(substitution)한 다음 부분적분(integration by parts)한다.

2단계 위치가 주어질 때

다루는 내용: $X = x$일 때의 확률

잠깐, 직접 해 보기 바늘의 중심은 가장 가까운 선으로부터 거리 x만큼 떨어져 있고, 바늘은 선에 대한 수선(perpendicular)과 각 y를 이룬다. 바늘은 선 쪽으로 얼마나 멀리까지 닿는가? x를 고정하면 어떤 y의 값에서 바늘이 선과 만나는가?

3단계 위치에 대한 평균

다루는 내용: 일반적인 던지기에 대한 확률

> ? **생각해 보기** X는 $[0, b]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 앞에서 구한 조건부 확률(conditional probability)에 X의 확률밀도함수(density)를 곱하여 적분하고, 첫 번째 적분을 이용할 수 있도록 $x = at$로 치환한다.

숨은 수학

뷔퐁의 국수

거의 계산 없이 답을 알아내는 방법이 있다. 바늘을 아무 모양으로나 구부려 "국수(noodle)"를 만들고, 그것이 선과 교차하는 횟수를 C라 하자. 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해 곡선의 교차 횟수의 기댓값은 그 작은 조각들의 기댓값의 합이므로 길이에 비례한다. 즉 어떤 상수 κ에 대해 $\mathrm{E}(C) = \kappa L$이다. κ를 구하기 위해 국수를 지름이 선의 간격 $2b$와 같은 원으로 잡자. 이 원은 항상 정확히 두 번 교차하고, 길이는 $2\pi b$이다. 따라서 $\kappa \cdot 2\pi b = 2$이고, $\kappa = \frac{1}{\pi b}$이다. 길이가 $2a < 2b$인 곧은 바늘은 많아야 한 번 교차하므로 $\mathrm{P}(\text{교차}) = \mathrm{E}(C) = \frac{2a}{\pi b}$이다. 이 논증은 Joseph-Émile Barbier(1860)가 제시한 것으로, 확률적 추론의 보석이라 할 만하다. π는 상수를 보정하기 위해 고른 원에서 나온다.

π 추정하기, 그리고 하지 말아야 할 방법

바늘 n개를 던져서 c개가 교차했다면 $\frac{c}{n} \approx \frac{2a}{\pi b}$이고 $\pi \approx \frac{2an}{bc}$이다. 오차는 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 정도로만 줄어들기 때문에, π를 소수점 아래 셋째 자리까지 구하려면 약 백만 번을 던져야 한다. 1901년 이탈리아의 수학자 Mario Lazzarini는 3408번 던져서 $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$(소수점 아래 여섯째 자리까지 정확)를 얻었다고 주장했다. 통계학자들은 이 결과가 믿기에는 지나치게 좋다고 지적했다. 3408번 던지고 바늘을 신중하게 고르면 $\frac{355}{113}$은 정확히 1808번의 교차에서 나오며, 적절한 순간에 실험을 멈추면 이 값을 만들어 낼 수 있다. 이는 선택적 보고에 관한 고전적인 교훈담이다.

뷔퐁

뷔퐁은 박물학자로, 파리 왕립 식물원의 원장이었고 36권짜리 박물지를 썼다. 그는 바늘 문제(그리고 정사각형 타일을 쓰는 변형인 "franc-carreau" 게임)를 1733년 과학 아카데미(Académie des Sciences)에 발표했고, 1777년에 그 풀이를 출판했다. 그의 목적은 산술뿐 아니라 기하학도 확률에 쓰일 수 있음을 보이는 것이었다. 여기에서 무작위 직선과 그것이 곡선 및 곡면과 만나는 교점을 다루는 이론인 적분기하학(integral geometry)이 자라났고, 이는 오늘날 2차원 단면으로부터 3차원 구조(예를 들어 조직 속의 세포)의 크기와 모양을 추정하는 학문인 입체해석학(stereology)에 쓰인다.

더 도전하기

1 **긴 바늘.** $a > b$이면 바늘이 두 개 이상의 선과 교차할 수 있다. 이때도 교차 횟수의 기댓값이 여전히 $\frac{2a}{\pi b}$임을 보여라.

2 **국수.** 길이가 $2a$인 바늘을 직각으로 구부린다(두 팔의 길이는 각각 a). 교차 횟수의 기댓값은 얼마인가?

3 **정사각형 타일.** 반지름이 r인 동전을 한 변의 길이가 $s > 2r$인 정사각형 타일이 깔린 바닥에 던진다. 동전이 한 타일 안에 완전히 놓일 확률을 구하여라.

4 **Lazzarini의 바늘.** $a = \frac{5}{6}b$일 때($\frac{2a}{\pi b} = \frac{5}{3\pi}$이다), 3408번 던져서 1808번 교차하면 추정값 $\pi \approx \frac{355}{113}$을 얻음을 보여라.

더 읽을거리

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press). 뷔퐁의 바늘에서 출발하는 기하학적 확률 입문서이다.
- **Lee Badger, "Lazzarini's lucky approximation of π"**, *Mathematics Magazine* 67 (1994). 의심스러운 실험의 통계학을 다룬다.
- **Paul Nahin, *Digital Dice*** (Princeton University Press). 확률 문제를 위한 몬테카를로 방법을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.20절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/buffon.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com