# 12.2 기저율 오류

**학습지**

**문제**

**STEP II 1998, 12번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q12

## 힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 1000명의 사람을 떠올려 보자. 그중 몇 명이 병에 걸렸는가? 그중 몇 명이 양성 판정을 받는가? 건강한 사람 중에서는 몇 명이 양성 판정을 받는가?

### 1단계 베이즈 정리(Bayes' theorem)

다루는 내용: Frankie의 확률

**생각해 보기** 1000명의 사람을 상상해 보자. 그중 병에 걸린 사람은 몇 명이고, 그 가운데 양성 판정을 받는 사람은 몇 명인가? 건강한 사람 중 양성 판정을 받는 사람은 몇 명인가?

**잠깐, 직접 해 보기** $\mathrm{P}(D \mid +) = \frac{\mathrm{P}(D \cap +)}{\mathrm{P}(+)}$로 쓰고, $\mathrm{P}(+)$를 Frankie가 병에 걸렸는지 아닌지에 따라 나누어라.

### 2단계 두 번째 검사

다루는 내용: $p$ 구하기

**생각해 보기** 두 번째 검사는 AL 검사에서 양성이었던 사람들에게만 실시한다. 그 집단에서 환자의 비율은 얼마인가? 이를 베이즈 정리의 새로운 사전 확률로 사용하고, 그 결과를 $\frac{1}{2}$과 같다고 놓아라.

## 숨은 수학

### 오즈와 증거

베이즈 정리는 **오즈**(*odds*)로 나타낼 때 가장 명료하다. $D$의 오즈는 $\mathrm{P}(D) : \mathrm{P}(\bar{D})$이다. 하나의 증거 $E$는 오즈에 **가능도비**(*likelihood ratio*) $\frac{\mathrm{P}(E|D)}{\mathrm{P}(E|\bar{D})}$를 곱한다.

$$\text{사후 오즈} = \text{사전 오즈} \times \text{가능도비}.$$

여기서 사전 오즈는 $1 : 99$이고 AL의 가능도비는 $0.9 \div \frac{1}{11} = 9.9$이므로, 사후 오즈는 $9.9 : 99 = 1 : 10$, 즉 확률로는 $\frac{1}{11}$이다. 가능도비가 10인 두 번째 독립적인 검사($p = 0.09$인 STEP 검사가 그렇다)는 오즈를 $1 : 1$로 만든다. 로그(logarithm)를 취하면 증거는 **더해진다**. 즉 각각의 독립적인 검사는 자신의 가능도비의 로그만큼 기여한다. 앨런 튜링(Alan Turing)은 바로 이 방법을 사용해 증거를 "밴(ban)"과 "데시밴(deciban)" 단위로 측정하며 블레츨리 파크(Bletchley Park)에서 에니그마 암호문을 해독했다.

### 검사의 오류

1999년, 사무 변호사(solicitor) Sally Clark는 두 아기 아들을 살해한 혐의로 유죄 판결을 받았는데, 그 근거의 일부는 한 가정에서 영아 돌연사(cot death)가 두 번 일어날 확률이 "7300만분의 1"이라는 증거였다. 그 수치 자체의 오류(두 죽음이 독립이라고 가정하여 유전적·환경적 요인을 무시했다)는 제쳐 두더라도, 그 추론은 $\mathrm{P}(\text{증거} \mid \text{무죄})$와 $\mathrm{P}(\text{무죄} \mid \text{증거})$를 혼동했다. 어머니가 두 아이를 살해하는 일 역시 극히 드물며, 따져야 할 것은 두 설명 사이

의 비교이다. 영국 왕립통계학회(Royal Statistical Society)는 공개 서한을 보내 이 오류를 지적했고, 그녀에 대한 유죄 판결은 2003년에 뒤집혔다. 그 수학은 바로 이 문제의 수학이다.

#### 기거렌처와 자연 빈도

1990년대에 심리학자 게르트 기거렌처(Gerd Gigerenzer)는 검사 통계를 조건부확률의 형태로 제시받은 의사들이 이 문제와 같은 질문에서 대부분 크게 틀렸지만, 같은 정보를 자연 빈도의 형태("여성 1000명 가운데 10명이 유방암에 걸렸고, 그중 8명이 양성 판정을 받는다...")로 제시받으면 대부분 맞힌다는 것을 보였다. 그의 연구는 여러 나라에서 의학적 위험을 환자에게 전달하는 방식을 바꾸어 놓았다.

## 더 도전하기

1 **냉장고 속 시체.** STEP II 1987, 16번 문제 (step.maths.org/questions/87-s2-q16)에 도전해 보자. 신뢰도가 서로 다른 두 목격자가 등장하는 베이즈 정리 문제로, STEP 문제 가운데서도 손꼽히게 기억에 남는 설정이다.

2 **얼마나 드물어야 할까?** 민감도(sensitivity)가 0.9이고 위양성 비율이 $\frac{1}{11}$인 검사에서, 양성 결과가 병에 걸렸을 가능성이 절반보다 크다는 뜻이 되려면 그 병은 얼마나 흔해야 하는가?

3 **검사를 반복하기.** AL 검사 자체를 반복하고, 그 사람의 실제 상태가 주어졌을 때 결과들이 서로 독립이라면, AL에서 두 번 양성 결과가 나온 뒤 병에 걸렸을 확률은 얼마인가? 세 번이라면?

4 **선별 검사.** 어떤 선별 검사 프로그램이 유병률(prevalence)이 10 000명 중 1명인 질환에 대해 백만 명을 검사한다. 사용하는 검사의 민감도는 99%이고 위양성 비율은 1%이다. 그 질환이 있을 수 있다는 통보를 받는 사람은 몇 명이며, 그중 실제로 질환이 있는 사람은 몇 명인가?

## 더 읽을거리

- **Gerd Gigerenzer, *Reckoning with Risk*** (Penguin). 자연 빈도, 의학 검사, 그리고 법정.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics*** (Pelican). 의학적 선별 검사와 Sally Clark 사건을 다룬다.
- **Sharon Bertsch McGrayne, *The Theory That Would Not Die*** (Yale University Press). 튜링의 활용을 포함한 베이즈 정리의 역사.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/base-rate.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com