# 12.18 무기억성

학습지

**문제**

**STEP III 2021, 11번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

## 힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** $x \geq 0$일 때 $\mathrm{P}(X > x)$는 무엇인가? $\mathrm{P}(X > s+t \mid X > s)$는 무엇인가?

### 1단계 정수 부분

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** $Y = n$인 것은 정확히 $n \leq X < n+1$일 때이다. $\mathrm{P}(X > x)$는 무엇인가?

### 2단계 소수 부분

다루는 내용: 소문항 (ii)

**잠깐, 직접 해 보기** $Z < z$라는 것은 $X$가 구간 $[n, n+z)$ 중 하나에 놓인다는 뜻이다. 이 구간들의 확률(probability)을 모두 더하면 등비급수(geometric series)가 된다.

### 3단계 $Z$의 평균

다루는 내용: 소문항 (iii)

**생각해 보기** 소문항 (ii)의 결과를 미분하여 $Z$의 확률밀도함수(density)를 구한 뒤 여기에 $z$를 곱하여 적분하거나, $\mathrm{E}(Z) = \int_0^1 \mathrm{P}(Z > z)\,\mathrm{d}z$를 이용한다.

#### 4단계 독립성

다루는 내용: 소문항 (iv)

**생각해 보기** $\mathrm{P}(Y = n$ 이고$z_1 < Z < z_2)$를 $X$에 대한 확률로 나타낸다. 이를 소문항 (i)과 (ii)에서 구한 답의 곱과 비교한다.

## 숨은 수학

### 지수분포가 특별한 이유

$Y$와 $Z$의 독립성은 $e^{-\lambda(n+z)} = e^{-\lambda n}e^{-\lambda z}$에서 곧바로 나오며, 이는 모습을 바꾼 무기억성이다. 사실 지수분포는 기억이 없는 **유일한** 연속분포이다. 모든 $s, t \geq 0$에 대해 $\mathrm{P}(X > s+t) = \mathrm{P}(X > s)\mathrm{P}(X > t)$이면, $g(t) = \ln \mathrm{P}(X > t)$는 $g(s+t) = g(s) + g(t)$를 만족하고, ($g$가 단조함수이면) 이로부터 반드시 $g(t) = -\lambda t$가 된다. 그래서 지수분포는 누적되는 것 없이 "무작위로" 일어나는 사건의 대기 시간을 모형화하는 데 쓰인다. 방사성 붕괴, 손님의 도착, 마모되지 않는 전자 부품의 고장이 그 예이다.

### 최솟값과 대기 시간의 역설

$X_1$과 $X_2$가 각각 비율 $\lambda_1$과 $\lambda_2$를 갖는 서로 독립인 지수분포 확률변수이면 $\mathrm{P}(\min > x) = e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}$이므로, 최솟값은 비율 $\lambda_1 + \lambda_2$인 지수분포를 따른다. 서로 독립인 두 무작위 사건 중 먼저 일어나는 것을 기다리는 일은, 두 비율을 합친 비율로 일어나는 사건 하나를 기다리는 일과 같다(연습문제의 STEP III 2002 Q13). 무기억성은 **대기 시간의 역설**(*waiting-time paradox*)도 설명해 준다. 버스가 평균 간격 10분으로 무작위로 도착한다면, 무작위 시각에 도착한 승객은 평균 5분이 아니라 10분을 기다린다. 남은 대기 시간에는 기억이 없기 때문이다. 그리고 승객이 도착한 시점을 포함하는 간격의 길이는 평균 20분인데, 긴 간격일수록 그 안에 도착할 가능성이 크기 때문이다.

### 러더퍼드와 푸아송 과정

1910년에 어니스트 러더퍼드(Ernest Rutherford)와 한스 가이거(Hans Geiger)는 방사성 원천에서 방출되는 알파 입자의 수를 7.5초 간격으로 세었고, 그 개수가 푸아송(Poisson) 분포를 따른다는 것을 발견하였다. 수학자 Harry Bateman은 방출이 일정한 비율로 서로 독립적으로 일어난다면 바로 그렇게 되어야 함을 보였다. 이때 방출 사이의 시간 간격은 지수분포를 따른다. 지수분포를 따르는 간격으로 이어지는 사건들의 흐름인 **푸아송 과정**(*Poisson process*)은 오늘날 시간 속의 무작위성을 나타내는 기본 모형으로, 전화 통화, 보험금 청구, 신경세포의 발화 등에 쓰인다. 다음 절인 Section 12.19에서는 이를 공간으로 확장한다.

## 더 도전하기

1 **두 버스 노선.** STEP III 2002, 13번 문제 (step.maths.org/questions/02-s3-q13)에 도전해 보라. 두 지수분포 확률변수의 최솟값을 이용하여 다음 버스까지의 대기 시간을 구하는 문제이다.

2 **기억이 없는 이산분포.** 기하분포에 기억이 없음을, 즉 $\mathrm{P}(Y \geq m+n \mid Y \geq m) = \mathrm{P}(Y \geq n)$임을 보여라.

3 **대기 시간의 역설.** 버스가 비율 $\lambda$인 푸아송 과정으로 도착한다. ($t$가 클 때) 고정된 시각 $t$를 포함하는 간격의 기대 길이가 평균 간격의 두 배인 $\frac{2}{\lambda}$임을 보여라.

4 **$Z$의 확률밀도함수.** $Z$의 확률밀도함수를 구하고, $\lambda = 1$과 $\lambda = 5$일 때 그 그래프의 개형을 그려라.

## 더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 지수분포와 푸아송 과정을 다룬다.
- **Sheldon Ross, *Introduction to Probability Models*** (Academic Press). 지수분포, 푸아송 과정, 대기행렬을 다룬다.
- **David Spiegelhalter, *The Art of Uncertainty*** (Pelican). 일상생활 속의 무작위성과 기다림을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.18절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/memoryless.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com