12.17 바나흐의 성냥갑

학습지

문제

STEP II 1992, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s2-q16

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 운전사가 N번째로 손을 뻗을 때 토피가 다 떨어졌음을 발견하려면, N번째에는 어느 봉지에 손을 뻗어야 하는가? 그 이전의 $N-1$번에는 무엇이 들어 있어야 하는가?

1단계 토피가 다 떨어진 것을 발견하는 경우

다루는 내용: T의 확률(probability)

생각해 보기 N번째로 손을 넣었을 때 토피가 다 떨어진 것을 알게 되려면, 그 N번째 시도는 무엇을 꺼내려는 것이어야 하는가? 그 앞의 $N-1$번의 시도에는 무엇이 포함되어 있어야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 앞선 시도들은 몇 가지 순서로 일어날 수 있는가? 박하사탕이 먼저 다 떨어진 것을 발견하는 일이 결코 없으려면, 꺼낸 박하사탕의 개수에 어떤 조건이 필요한가?

2단계 박하사탕이 다 떨어진 것을 발견하는 경우

다루는 내용: M의 확률

생각해 보기 토피와 박하사탕의 역할을 서로 바꾸어 같은 논증을 반복한다.

3단계 **조건부 확률(conditional probability)**

다루는 내용: 답

생각해 보기 두 가지 발견이 같은 시도에서 동시에 일어날 수는 없다. N번째 시도에서 발견이 일어났다는 조건 아래에서, 그것이 토피였을 확률은 얼마인가?

숨은 수학

바나흐의 성냥갑

바나흐의 버전에서는 각 성냥갑에 처음에 성냥이 n개씩 들어 있고, 두 주머니가 선택될 가능성은 같다. 그가 처음으로 빈 성냥갑을 발견했을 때 다른 성냥갑에 남은 성냥의 수를 K라 하자. $K = k$이려면, 빈 성냥갑으로 한 번 더 손을 뻗기 전에 빈 성냥갑에서 n개, 다른 성냥갑에서 $n-k$개를 어떤 순서로든 꺼냈어야 한다. 또한 어느 성냥갑이든 빈 쪽이 될 수 있다. 따라서

$$\mathrm{P}(K=k) = 2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

이 확률들은 k가 커질수록 감소하는데, 다만 $\mathrm{P}(K=0) = \mathrm{P}(K=1)$이다(그림 12.17.1). 남은 성냥 수의 기댓값(expected value)은 약 $2\sqrt{n/\pi} - 1$이다. 각 성냥갑에 성냥이 50개씩 있으면 약 7이다. 여기서 $\sqrt{n}$은 $2n$번의 무작위 선택 뒤 두 성냥갑 사이에 생기는 불균형의 전형적인 크기로, 생일 문제(Section 9.9)와 무작위 행보(random walk)에서 나오는 것과 같은 제곱근 법칙이다.

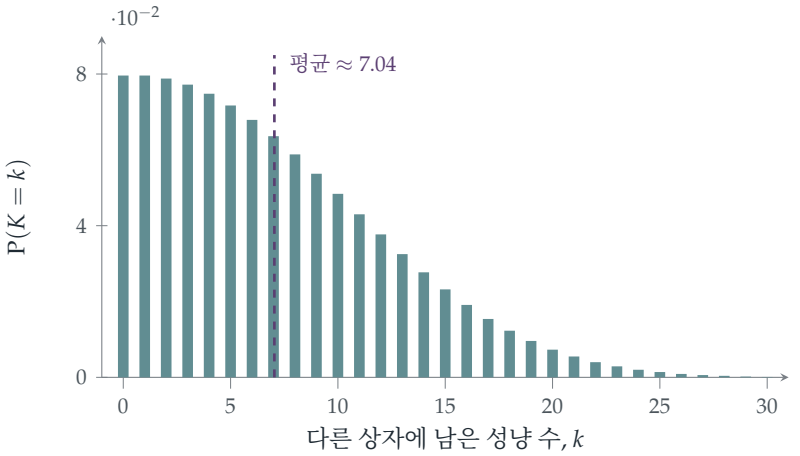

그림 12.17.1 각 상자에 성냥이 50개씩 있는 바나흐의 성냥갑 문제: 한 상자가 처음으로 빈 것이 발견되었을 때 다른 상자에 남은 성냥 수의 분포. 가장 가능성이 높은 값은 0과 1로 서로 같지만, 평균은 약 7이다.

음이항분포

각각 성공 확률이 p인 독립 시행에서 r번째 성공을 얻을 때까지 필요한 시행 횟수는 **음이항분포**(negative binomial distribution)를 따른다. 즉 $\mathrm{P}(N = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$이다. 택시 운전사 문제는 두 음이항 과정(토피와 박하사탕) 사이의 경주이며, 각 과정은 사탕 수보다 한 번 더 많은 "성공"을 필요로 한다. 음이항분포는 보험(청구 건수), 생태학(무리 지어 분포하는 동물의 개체 수), 유전학 등에 나타나며, 흔히 푸아송 분포(Poisson distribution)보다 유연한 대안으로 쓰인다.

바나흐와 스코틀랜드 카페

함수해석학(functional analysis)의 창시자 가운데 한 사람인 바나흐는 르부프(Lwów, 지금의 리비우(Lviv))의 스코틀랜드 카페에서 많은 수학 연구를 했다. 그곳에서 그와 동료들은 웨이터가 보관하던 공책인 **스코틀랜드 책**(Scottish Book)에 문제를 적어 두었고, 상품은 맥주 한 잔부터 살아 있는 거위 한 마리까지 다양했다. 바나흐의 스승인 슈타인하우스는 바나흐의 흡연을 기리는 연설을 위해 성냥갑 문제를 고안했다. 이 문제를 처음으로 출판물에서 분석한 사람은 펠러(William Feller)로, 1950년에 나온 그의 유명한 확률론 교과서에서였다.

더 도전하기

1 **작은 경우.** $n = m = 1$이고 $p = \frac{1}{2}$일 때 가능한 순서를 모두 나열하고 N의 분포를 구하여라.

2 **바나흐의 공식.** $n = 1$과 $n = 2$일 때 $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^{-(2n-k)} = 1$임을 확인하여라.

3 **같은 꼭대기.** 바나흐 문제에서 모든 n에 대해 $\mathrm{P}(K = 0) = \mathrm{P}(K = 1)$임을 보여라.

4 **어느 쪽이 먼저 떨어지는가?** 택시 운전사 문제에서 $n = m = 2$이고 $p = \frac{2}{3}$일 때, (언제든) 처음으로 빈 것이 발견되는 봉지가 토피 봉지일 확률을 구하여라.

더 읽을거리

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), 제VI장. 바나흐 문제를 세상에 처음 소개한 책이다(확률론 입문과 그 응용).
- **R. Daniel Mauldin (ed.), *The Scottish Book*** (Birkhäuser). 스코틀랜드 카페의 문제들을 해설과 함께 실었다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 음이항분포를 다룬다(확률론 입문).

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.17절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/matchboxes.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com