12.16 앞으로 보고 거꾸로 보는 마르코프 연쇄

학습지

문제

STEP III 1996, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** "각 행의 합이 1이다"라는 조건은 무슨 뜻인가? 각 열의 합도 1인가?

1단계 한 단계

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 현재 정리의 유형에 대해 조건을 걸고 전확률 법칙(law of total probability)을 이용한다.

2단계 정상 분포

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$과 함께 $j = 1, 2, 3$에 대해 $a_j = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j}$를 써 본다. 어느 방정식부터 시작하는 것이 가장 간단한가?

3단계 마르코프 연쇄를 거꾸로 돌리기

다루는 내용: 소문항 (iii)

> ? **생각해 보기** q_{ij}는 이번 정리가 유형 j일 때 바로 앞의 정리가 유형 i였을 확률이다. 두 정리 모두에 대해 소문항 (ii)의 답을 사용하여 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 적용한다.

숨은 수학

평형으로의 수렴

엑스 교수가 어떤 정리에서 출발하든, n개의 정리를 더 증명한 뒤 유형의 분포는 $\mathbf{a}_0 P^n$이다. 이 연쇄처럼 모든 유형 다음에 모든 유형이 올 수 있는 연쇄에서는, 출발점에 관계없이 P^n이 모든 행이 정상분포 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$와 같은 행렬로 수렴(converge)한다. 수렴 속도는 P의 나머지 고윳값들(여기서는 0.2와 0.1)이 결정하며, 이들의 거듭제곱은 기하급수적으로 줄어든다. 단 몇 개의 정리만 지나도 엑스 교수의 과거는 잊혀진다. 마르코프 연쇄에 대한 이 **에르고딕 정리**(ergodic theorem)는 대학 2학년 확률론 과정의 핵심 결과이며, 마르코프 연쇄 몬테카를로(Markov chain Monte Carlo) 방법이 작동하는 근거이다. 복잡한 분포에서 표본을 뽑으려면, 그 분포를 정상분포로 갖는 마르코프 연쇄를 설계하여 오랫동안 돌리면 된다.

가역성

거꾸로 가는 연쇄 (q_{ij})는 순방향 연쇄 (p_{ij})와 다르다. 엑스 교수의 정리를 오랫동안 기록한 것을 보면 시간의 방향을 알아낼 수 있다는 뜻이다. 거꾸로 가는 연쇄와 순방향 연쇄가 일치하는 연쇄, 즉 모든 i, j에 대해 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$인 연쇄를 **가역적**(reversible)이라고 한다. 네트워크 위의 무작위 행보(random walk)와 열평형 상태에 있는 물리계의 모형이 여기에 속한다. 가역성은 정상분포를 쉽게 찾게 해 주므로 강력한 성질이다.

마르코프와 푸시킨

안드레이 마르코프(Andrey Markov)는 1906년에 자신의 연쇄를 도입했는데, 큰 수의 법칙(law of large numbers)에 독립성(independence)이 꼭 필요하지는 않다는 것을 보이려는 것이 한 가지 이유였다. 이는 독립성이 필요하다고 주장한 수학자 Pavel Nekrasov와의 논쟁에서 나온 것이다. 1913년에 마르코프는 이 아이디어를 푸시킨(Pushkin)의 운문 소설 **예브게니 오네긴**(Eugene Onegin)의 처음 20 000개 글자에 적용했다. 그는 각 글자를 모음과 자음으로 분류하고, 각 글자의 유형이 바로 앞 글자의 유형에 의존하며 그 방식이 두 상태 연쇄로 잘 설명된다는 것을 보였다. 이것은 최초의 텍스트 통계 분석이었으며, 오늘날 모든 예측 입력 시스템의 조상이다.

더 도전하기

1 **토끼 굴.** STEP III 2003, 13번 문제 (step.maths.org/questions/03-s3-q13)에 도전해 보아라. 각 꼭짓점에 출구가 있는 정사각형의 꼭짓점 위를 움직이는 무작위 행보를 첫 단계 방정식으로 푸는 문제이다.

2 **두 단계.** 엑스 교수의 마지막 정리가 새롭고 옳은 정리였다면, 그다음다음 정리가 세 유형 각각일 확률을 구하여라.

3 **고윳값.** P의 고윳값이 1, 0.2, 0.1임을 보여라.

4 **가역적인가?** 엑스 교수의 연쇄에 대해 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$가 성립하는지 확인하여라. 그 답은 무엇을 말해 주는가?

더 읽을거리

- **James Norris, *Markov Chains*** (Cambridge University Press). 학부 과정의 표준 교재이다.
- **Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*** (Cambridge University Press). 짧으며, 마르코프 연쇄 몬테카를로를 잘 다룬다.
- **Brian Hayes, "First links in the Markov chain"**, *American Scientist* 101 (2013). 마르코프의 푸시킨 분석을 다시 들려준다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.16절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/markov.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com