12.15 멸종인가 폭발인가

학습지

문제

STEP II 2003, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 어떤 단계에서 입자가 두 개 있다면, 다음 단계의 입자 수는 어떤 분포(distribution)를 따르는가?

1단계 둘, 그다음 둘

다루는 내용: 결합확률(joint probability)

> ? **생각해 보기** $P(X_1 = 2)$는 얼마인가? 입자가 두 개 있을 때, 다음 세대(generation)의 입자 수의 분포(distribution)는 어떻게 되는가?

2단계 거꾸로 추론하기

다루는 내용: 조건부확률(conditional probability)

잠깐, 직접 해 보기 X_1의 값에 따라 경우를 나누어 $\mathrm{P}(X_2 = 2)$를 구한다. 그다음 조건부확률의 정의를 이용하고, 그 답을 $\frac{9}{25}$로 놓는다.

3단계 기대되는 개체 수

다루는 내용: 기댓값(expectation)과 극한(limit)

생각해 보기 한 세대에 입자가 k개 있으면, 다음 세대의 입자 수의 기댓값은 얼마인가? k에 대해 평균을 내고, $\mathrm{E}(X_n)$에 대한 점화식(recurrence)을 푼다.

숨은 수학

멸종 확률

$p = \frac{3}{4}$일 때 개체 수의 기댓값은 한없이 커진다. 그렇다면 개체군은 살아남는가? 꼭 그렇지는 않다. 첫 입자가 자손을 하나도 낳지 않으면(확률 $q^2 = \frac{1}{16}$) 혈통은 곧바로 끊긴다. 결국 멸종할 확률(extinction probability)을 e라 하자. 첫 입자가 자손 k개를 낳으면, 그 자손들 각각의 혈통은 독립적으로 확률 e로 끊어지므로

$$e = q^2 + 2pq\,e + p^2e^2 = (q + pe)^2 = \mathrm{G}(e),$$

이다. 여기서 $\mathrm{G}(s) = (q + ps)^2$은 자손 수의 **확률생성함수**(probability generating function)이다. 멸종 확률은 G의 고정점이며, 사실은 음이 아닌 고정점 가운데 **가장 작은** 것이다. $p = \frac{3}{4}$일 때 $(1 + 3e)^2 = 16e$에서 $9e^2 - 10e + 1 = 0$이므로 $e = \frac{1}{9}$ 또는 1이고, 멸종 확률은 $\frac{1}{9}$이다. $p = \frac{1}{4}$일 때 $[0, 1]$에 있는 고정점은 $e = 1$뿐이므로, 멸종은 확실하다(그림 12.15.1).

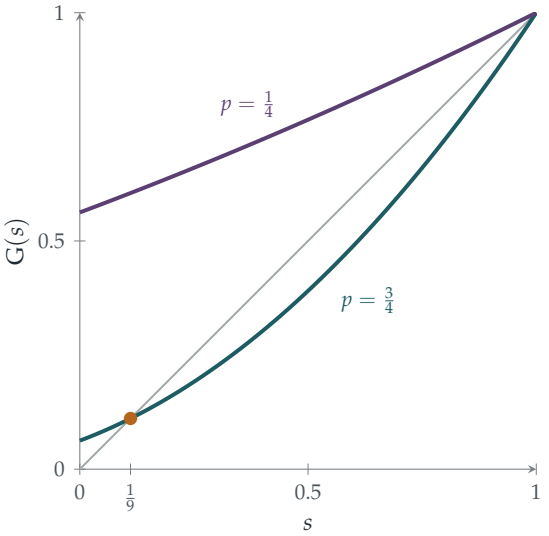

그림 12.15.1 자손 수의 생성함수 $G(s) = (q + ps)^2$과 직선 $y = s$. 멸종 확률은 두 그래프가 만나는 가장 작은 점이다. $p = \frac{1}{4}$(자주색, 평균 $\frac{1}{2}$)이면 그 점은 $s = 1$이므로 멸종은 확실하다. $p = \frac{3}{4}$(청록색, 평균 $\frac{3}{2}$)이면 그 점은 $s = \frac{1}{9}$(호박색)이므로 개체군은 확률 $\frac{8}{9}$로 영원히 살아남는다.

임계 문턱

일반적으로 분지 과정은 자손 수의 평균이 1보다 작으면 확실히 멸종하고, 평균이 1과 같을 때에도 모든 개체가 정확히 한 명의 자손을 두는 자명한 경우(이때 혈통은 한 번에 한 명씩 그냥 영원히 이어진다)를 제외하면 확실히 멸종한다. 평균이 1보다 크면 양의 확률로 살아남는다. 자손 수의 평균은 역학(疫學)에서 말하는 **재생산수**(reproduction number) R이다. $R > 1$인 전염병은 크게 번질 수 있지만, 그런 경우에도 초기 발병이 우연히 사그라들 수 있으며, 그 확률은 바로 위의 고정점 방정식으로 주어진다. 핵물리학에서 연쇄 반응은 각 핵분열이 평균적으로 정확히 한 번의 핵분열을 더 일으킬 때 **임계**(critical) 상태라고 하며, 원자로를 운전하는 기술은 바로 그 상태를 유지하는 것이다.

골턴, 왓슨, 비에네메

골턴의 질문에는 1874년 Henry William Watson 목사가 답했지만, 그 답은 부분적으로 틀렸다. 그는 고정점 방정식을 찾아냈지만 두 번째 근을 놓치는 바람에 모든 성은 결국 사라진다고 결론지었다. 사실 올바른 분석은 이미 1845년에 프랑스의 통계학자 비에네메(Irénée-Jules Bienaymé)가 내놓았으나, 그의 연구는 1970년대까지 잊혀 있었다. 이 모형은 오늘날 **골턴–왓슨 과정**(Galton–Watson process)(때로는 비에네메–골턴–왓슨 과정)이라 불리며, 확률 과정을 다루는 모든 강의에서 핵심적인 예로 등장한다.

더 도전하기

1 **일반적인 경우의 멸종.** 자손 수의 분포가 $\mathrm{B}(2, p)$일 때, 멸종 확률이 $p \le \frac{1}{2}$이면 1이고 $p > \frac{1}{2}$이면 $\left(\frac{q}{p}\right)^2$임을 보여라.

2 **분산.** $\mathrm{Var}(X_n)$이 $\mathrm{Var}(X_n) = (2p)^2\mathrm{Var}(X_{n-1}) + 2pq\,\mathrm{E}(X_{n-1})$을 만족함을 보이고, $p = \frac{1}{2}$일 때 분산(variance)을 구하여라.

3 **n세대까지의 멸종.** $e_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$이라 하자. $e_n = \mathrm{G}(e_{n-1})$임을 보이고, $p = \frac{3}{4}$일 때 e_1, e_2, e_3을 계산하여라. 이 값들은 $\frac{1}{9}$에 가까워지는가?

4 **성씨.** 각 남자가 아들을 0명, 1명, 2명, 3명 둘 확률이 각각 $\frac{1}{4}$라면, 그의 성이 결국 사라질 확률은 얼마인가?

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & David Stirzaker, *Probability and Random Processes*** (Oxford University Press). 분지 과정을 다루는 절.
- **Adam Kucharski, *The Rules of Contagion*** (Profile). 일반 독자를 위한 재생산수와 감염병 발생 이야기.
- **David Kendall, "Branching processes since 1873"**, *Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966). 비에네메를 포함한 분지 과정의 역사.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.15절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/branching.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com