# 12.14 혼합 전략

학습지

**문제**

**STEP I 1989, 16번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q16

## 힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 두 사람이 말하는 수의 각 쌍에 대하여 B의 상금을 나타내는 표를 만들어 보라(B의 수는 세로로, A의 수는 가로로 놓는다).

### 1단계 고정된 추측에 맞서기

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 두 사람의 추측의 각 쌍에 대하여 B의 상금을 표로 만들어 본다. A가 항상 같은 수를 말한다면 B는 어느 칸을 골라야 하는가?

### 2단계 무작위 추측에 맞서기

다루는 내용: 소문항 (ii)

**생각해 보기** A가 각 수를 확률(probability) $\frac{1}{3}$로 추측한다면, B가 $j$를 말할 때 B의 기대 이득(expected gain)은 얼마인가? 표의 한 행을 따라 평균을 내 본다.

### 3단계 일반적인 경우

다루는 내용: 소문항 (iii)

**잠깐, 직접 해 보기** B의 기대 상금을 A의 추측별로 묶어 $a_1$, $a_2$, $a_3$의 계수를 구한다. 세 계수가 모두 0이 되도록 $b_j$를 고를 수 있는가? 세 방정식이 독립(independent)인지 확인해 본다.

## 숨은 수학

### 최소최대 정리

보수 행렬 $M$으로 주어지는 2인 **영합**(*zero-sum*) 게임에서 B가 확률 $\mathbf{b}$를, A가 확률 $\mathbf{a}$를 고르면 B의 기대 상금은 $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}$이다. 폰 노이만의 최소최대 정리는

$$\max_{\mathbf{b}} \min_{\mathbf{a}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a} = \min_{\mathbf{a}} \max_{\mathbf{b}} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} M \mathbf{a}.$$

임을 말한다. 말로 하면, B가 무작위 전략을 미리 공표하여 보장할 수 있는 금액은, A가 자신의 전략을 공표하여 B를 묶어 둘 수 있는 금액과 같다. 이 공통의 값을 게임의 **값**(*value*)이라 한다. 여기서는 반대칭성 때문에 값이 0이고, 전략 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$는 두 플레이어 모두에게 최적이다. 이 정리는 선형대수와 볼록성(convexity)을 이용하여 증명하며(선형 계획법(linear programming)의 쌍대 정리(duality theorem)와 동치이다), 이를 여러 플레이어로 일반화한 **내시 균형**(*Nash equilibrium*)으로 존 내시(John Nash)는 노벨 경제학상을 받았다.

### 왜 무작위화하는가?

여기서 무작위성은 운의 문제가 아니라 정보의 문제이다. B의 선택을 예측할 수 있다면 A는 그것을 공략할 수 있다. B는 올바른 확률로 무작위화함으로써 자신의 선택을 예측할 수 없게 만들 **뿐 아니라** 어떤 예측도 도움이 되지 않도록 한다. 실제 예로는 축구의 페널티킥이 있다. 프로 선수들을 연구한 결과, 키커와 골키퍼가 게임 이론의 최적값에 가까운 비율로 왼쪽과 오른쪽을 무작위로 선택한다는 사실이 밝혀졌다. 테니스의 서브도 또 다른 예이다.

### 폰 노이만의 1928년 논문

존 폰 노이만은 1928년 논문 "On the theory of games of strategy"(전략 게임 이론에 관하여)에서 최소최대 정리를 증명하였다. 이 연구의 동기는 포커였는데, 포커에서 블러핑은 무작위화의 한 형태이다. 1944년에 그는 경제학자 오스카어 모르겐슈테른(Oskar Morgenstern)과 함께 *Theory of Games and Economic Behavior*(게임 이론과 경제 행동)를 펴내어 게임 이론을 하나의 학문 분야로 세웠다. 폰 노이만은 훗날, 최소최대 정리를 핵심 결과로 여겼으며 이 정리가 없었다면 출판할 가치가 있는 게임 이론은 없었을 것이라고 회고하였다.

## 더 도전하기

1 **A의 최선의 대응.** B가 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$를 사용하면 A의 모든 전략에 대해 기대 상금이 0임을 보여라. B가 대신 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$을 사용하면 A의 최선의 대응을 구하라.

2 **가위바위보.** 가위바위보의 보수 행렬을 쓰고 최적 전략을 구하라. 여기서는 왜 균등 전략이 최적이고, 이 문제에서는 그렇지 않은가?

3 **유일성.** 지지 않음을 보장하는 B의 전략은 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ **하나뿐**임을 보여라. (**힌트:** 그 전략은 $X, Y, Z$를 모두 음이 아니게 만들어야 한다. $X + 2Y + Z = 0$을 이용하라.)

4 **변형된 게임.** 차가 2일 때의 벌금이 £2가 아니라 £3이라면 최적 전략을 구하라.

## 더 읽을거리

- **Ken Binmore, *Playing for Real*** (Oxford University Press). 철저하면서도 친절한 게임 이론 입문서.
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *The Art of Strategy*** (Norton). 스포츠와 비즈니스의 예를 곁들인 게임 이론.
- **William Poundstone, *Prisoner's Dilemma*** (Anchor). 폰 노이만, 게임 이론, 그리고 냉전.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.14절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/mixed-strategies.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com