12.13 삼자 결투

학습지

문제

STEP II 1995, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 두 사람의 결투에서 퍼시가 먼저 던진다. 그가 곧바로 맞히거나, 아니면 둘 다 빗맞혀서 상황이 처음과 똑같이 되풀이된다. 퍼시가 이길 확률(probability)에 대한 방정식을 세워 보아라.

1단계 결투

다루는 내용: 두 사람의 결투

> ? **생각해 보기** 퍼시가 먼저 던진다. 퍼시가 곧바로 맞히거나, 두 사람 모두 빗맞혀 처음 상황으로 되돌아간다. 퍼시가 이길 확률(probability)에 대한 방정식을 세우고 풀어라.

2단계 앨저넌의 세 가지 선택

다루는 내용: 소문항 (i), (ii), (iii)

잠깐, 직접 해 보기 각 경우에 누가 남고, 다음에 누가 던지는가? 알맞은 사람이 먼저 던지도록 하여 결투 공식을 이용하라. (iii)의 경우에는 버티가 커스버트를 맞히는지 아닌지로 나누어 생각하라.

3단계 조언

다루는 내용: 앨저넌의 최선의 계획

생각해 보기 앨저넌은 누구를 맞힐지가 아니라 누구를 겨냥할지를 고를 수 있다. 커스버트를 겨냥한다면, 빗맞힐 가능성까지 고려할 때 앨저넌이 이길 전체 확률은 얼마인가? 일부러 빗맞히는 경우와 비교하라.

숨은 수학

전략과 게임 이론

삼자 결투는 게임 이론의 핵심 아이디어를 보여 준다. 최선의 행동은 다른 참가자들이 어떻게 대응할지에 달려 있다는 것이다. 가장 위험한 상대인 커스버트를 맞히는 것이 뻔한 수이지만, 그 수는 앨저넌에게 불리한 방향으로 게임을 바꾼다. 이 문제에서는 버티와 커스버트의 전략(strategy)이 고정되어 있다(두 사람은 서로를 겨냥한다). 완전한 게임 이론적 분석에서는 각 참가자가 다른 참가자들도 똑같이 한다는 것을 알면서 자신의 전략을 스스로 고른다. 1944년 폰 노이만(John von Neumann)과 Oskar Morgenstern의 연구, 1950년 내시(John Nash)의 연구에서 시작된 이러한 분석은 오늘날 경제학, 진화생물학, 정치학의 토대를 이루고 있다.

약점이 되는 강점

삼자 결투에서 누가 이길까? 앨저넌이 최선의 계획을 따르면 승리 확률은 앨저넌이 $\frac{226}{475}$, 버티가 $\frac{135}{475}$, 커스버트가 $\frac{114}{475}$이다. 가장 뛰어난 사수가 살아남을 가능성이 가장 낮은데, 선택권이 있는 사람은 모두 그를 겨냥하기 때문이다. 같은 양상은 후보가 여럿인 선거, 기업 간 경쟁, 그리고 가장 강한 경쟁자가 첫 번째 표적이 될 수 있는 자연에서도 나타난다. 1950년대에 삼자 결투를 게임 이론에 도입한 Martin Shubik은 이를 이용해 가장 적합한 자가 반드시 살아남는가 하는 질문을 던졌다.

더 도전하기

1 **버티와 커스버트.** 앨저넌이 일부러 빗맞힐 때, 버티가 이길 확률은 $\frac{135}{475}$이고 커스버트가 이길 확률은 $\frac{114}{475}$임을 확인하여라.

2 **더 나은 사수.** 앨저넌이 $\frac{2}{5}$ 대신 확률 a로 맞힌다면, a가 어떤 값일 때 일부러 빗맞히는 것이 여전히 그의 최선의 첫 수인가?

3 **버티는 커스버트를 겨냥해야 할까?** 앨저넌이 일부러 빗맞힌다고 할 때, 버티는 앨저넌보다 커스버트를 겨냥하는 것이 유리한가? (커스버트의 행동은 바뀌지 않는다고 가정한다.)

4 **던지는 횟수가 정해진 결투.** 각 참가자가 두 번씩만 던질 수 있는 결투에서 퍼시가 이길 확률을 구하고, 횟수 제한이 없는 결투와 비교하여라.

더 읽을거리

- **D. Marc Kilgour & Steven Brams, "The truel"**, *Mathematics Magazine* 70 (1997). 삼자 결투를 쉽게 개관한 글이다.
- **Avinash Dixit & Barry Nalebuff, *Thinking Strategically*** (Norton). 일반 독자를 위한 게임이론 책으로, 삼자 결투도 다룬다.
- **Ken Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction*** (Oxford University Press). 게임이론 입문서이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.13절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/truel.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com