12.12 언제 그만 찾아야 하는가

학습지

문제

STEP I 2001, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q14

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 면접 순서가 무작위일 때, 전체에서 최고인 지원자가 처음 면접한 n명 안에 있을 확률은 얼마인가?

1단계 처음 n명 중 최고가 전체 최고인 경우

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 처음 n명 중 최고인 사람이 전체에서도 최고가 되는 것은 언제인가? 전체 최고인 사람은 어느 위치에 있을 가능성이 똑같은가?

2단계 최고 또는 두 번째

다루는 내용: 소문항 (ii), 그리고 $N = 4$, $n = 2$인 경우

> **잠깐, 직접 해 보기** 처음 n명 중 최고인 사람이 전체에서 두 번째가 되는 것은 전체 두 번째인 사람이 처음 n명 안에 있고 전체 최고인 사람은 그 안에 없을 때, 그리고 그때뿐이다. 이 확률(probability)을 구하여 소문항 (i)의 결과에 더한다. $N = 4$인 경우에는 상위 두 후보가 있을 수 있는 위치를 모두 나열해 본다.

3단계 최적 전략(optimal strategy)

다루는 내용: 문제를 넘어서

> ? **생각해 보기** 처음 r명의 후보는 거절하고, 그 뒤로 그들 모두보다 나은 첫 번째 후보를 선택한다. 전체 최고인 사람이 $k > r$번째 위치에 있다면, 그 사람이 선택되는 것은 언제인가? N 대신 $k-1$을 넣어 소문항 (i)의 결과를 이용한다.

숨은 수학

최적 멈춤

비서 문제(secretary problem)는 **최적 멈춤**(*optimal stopping*)의 출발점이 된 예이다. 최적 멈춤이란 시간에 따라 들어오는 정보를 바탕으로, 기대 보상을 최대로 하도록 언제 행동할지를 결정하는 문제이다. ("r명을 불합격시키고, 그 뒤 지금까지의 최고가 나오면 뽑는다"는 전략만이 아니라) **모든** 전략 가운데 이러한 문턱 규칙이 최적임을 마지막 지원자에서부터 거꾸로 따져 가는 논증으로 증명할 수 있다. 주식을 언제 팔지, 금융 옵션을 언제 행사할지, 주차 자리를 얼마나 오래 찾을지도 같은 수학이 지배한다. 놀라운 점은 극한에서 답이 N에 의존하지 않는다는 것이다. 지원자가 백 명이든 백만 명이든 $\frac{1}{e}$의 확률로 성공한다.

변형

상위 두 지원자 중 누구라도 만족한다면, 최선의 전략은 약 57%의 확률로 성공한다. 최고의 지원자를 뽑을 확률 대신 뽑힌 지원자의 기대 **순위**(expected rank)를 최적으로 하려 한다면, 최적 전략은 더 복잡해지고 기대 순위는 약 3.87로 수렴한다(Chow, Moriguti, Robbins, Samuels, 1964). 불합격시킨 지원자를 어떤 확률로 다시 부를 수 있거나, 지원자 점수의 분포를 알고 있다면("완전 정보" 문제) 답은 또 달라진다. 연습문제의 아이스크림 문제는 가장 단순한 경우이다. 한 명만 불합격시키고, 그다음에 더 나은 것이 나오면 택한다.

누가 풀었을까?

이 문제는 1950년대에 수학자들 사이에서 돌았고, 1960년에 마틴 가드너(Martin Gardner)가 "구골(googol) 게임"이라는 이름으로 널리 알렸다(종이쪽지에 수를 적으면, 상대가 한 장씩 뒤집어 보다가 가장 큰 수에서 멈춰야 한다). Thomas Ferguson의 글 "Who solved the secretary problem?"(1989)은 이 문제의 얽히고설킨 역사를 추적한다. 한 전승에 따르면 천문학자 요하네스 케플러(Johannes Kepler)는 1611년에 두 번째 아내를 고르면서 열한 명의 후보를 만났고, 결국 다섯 번째 후보에게 청혼했다고 한다.

더 도전하기

1 **아이스크림.** STEP II 2006, 13번 문제 (step.maths.org/questions/06-s2-q13)에 도전해 보라. 간단한 규칙을 쓰는 작은 비서 문제이다. 첫 번째 것을 거절하고, 그다음 그것보다 나은 첫 번째 것을 택한다.

2 **작은 N.** $N = 4$일 때 최선의 r의 값과 성공 확률을 구하라. 모든 경우를 나열하여 확인하라.

3 **최고 또는 두 번째.** 소문항 (ii)를 이용하여, "처음 n명 중 최고가 상위 두 명 중 하나이다"가 "처음 n명 중 최고가 전체 최고이다"보다 훨씬 일어나기 쉬움을 논증하라. 이것은 상위 두 명 중 하나를 뽑기 위한 전략에 대해 무엇을 시사하는가?

4 **정확한 최댓값.** $N = 10$일 때 그림에서 $r = 3$이 최적임을 확인하라. $N = 100$일 때 $r = 37$이 최적임을 보여라($r = 36, 37, 38$일 때의 성공 확률은 소수점 아래 넷째 자리까지 0.3710, 0.3710, 0.3708이다).

더 읽을거리

- **Thomas Ferguson, "Who solved the secretary problem?"**, *Statistical Science* 4 (1989). 역사와 여러 변형을 다룬다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Brian Christian & Tom Griffiths, *Algorithms to Live By*** (William Collins). 최적 멈춤을 비롯한 여러 알고리즘을 일상의 결정에 적용한다.
- **Martin Gardner, *New Mathematical Diversions*** (Mathematical Association of America). 구골 게임을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.12절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/secretary.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com