12.10 느슨한 끈 끝 묶기

학습지

문제

STEP III 2008, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q13

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 두 끝을 묶은 뒤에는 끈이 몇 가닥 남는가? (고리가 된 것은 더 이상 "가닥"으로 세지 않는다.) 이 개수는 고리가 만들어졌는지에 따라 달라지는가?

1단계 첫 번째 매듭

다루는 내용: 첫 단계

? **생각해 보기** 끝은 모두 $2n$개 있다. 그중 하나를 고르자. 나머지 끝 가운데 몇 개가 이 끝과 묶였을 때 고리(ring)를 만드는가?

2단계 모든 매듭

다루는 내용: 고리 개수의 기댓값

> **잠깐, 직접 해 보기** 매듭을 하나 지을 때마다, 고리가 생기든 생기지 않든, 양 끝을 가진 끈은 몇 가닥이 남는가? 그렇다면 끈이 k가닥 남아 있을 때 짓는 매듭에서 고리가 생길 확률(probability)은 얼마인가? 기댓값(expected value)을 모두 더하라.

3단계 분산

다루는 내용: 분산

> **생각해 보기** 한 매듭에서 고리가 생길 확률은 앞선 매듭에서 일어난 일에 따라 달라지는가? 그렇지 않다면 분산(variance)에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

4단계 사만 가닥의 끈

다루는 내용: $n = 40\,000$인 경우

> **생각해 보기** $1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$을 $2n$까지의 모든 역수(reciprocal)의 합에서 짝수의 역수를 뺀 것으로 나타내라. $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \approx \ln m$을 이용하라.

숨은 수학

로그적 증가

고리 개수의 기댓값은 $\frac{1}{2}\ln n$처럼 증가하고, 분산은 평균에 가깝다(둘 다 작은 확률들의 합이다). 중심극한정리(central limit theorem, Section 12.24)에 따르면, n이 클 때 고리의 개수는 평균과 분산이 약 $\frac{1}{2}\ln(4n)$인 정규분포(normal distribution)를 근사적으로 따른다. 끈이 40 000가닥이면 고리는 대개 2개에서 11개 사이로 생긴다.

무작위 순열의 순환

같은 로그가 n개 대상의 무작위 순열(permutation)이 갖는 순환(cycle)의 개수에도 나타난다. 그 평균은 $H_n \approx \ln n$이다(끈 문제는 이와 가까운 친척으로, $\frac{1}{2}\ln n$이다). 무작위 순열은 순환이 적다. 대개 거대한 순환 하나가 원소 대부분을 포함하며, 가장 큰 순환에 속한 원소의 비율은 평균적으로 약 0.62로, 이것이 골롬–딕맨 상수(Golomb–Dickman constant)이다. 끈을 무작위로 엉키게 하는 것도 같은 방식으로 움직인다. 끈의 대부분은 긴 고리 한두 개에 들어간다. 이러한 사실들은 **무작위 조합 구조**(*random combinatorial structures*) 연구의 일부이며, 이 분야는 정수론(number theory)과도 연결되어 있다(무작위 정수의 소인수(prime factors)는 무작위 순열의 순환처럼 행동한다).

무작위 매듭과 고분자

끈 묶기 문제는 물리계의 장난감 모형이다. 용액 속의 긴 고분자(polymer) 분자들은 끝과 끝이 이어져 고리와 사슬을 이루며, 고리 형성의 통계는 비슷한 규칙을 따른다. 매듭 이론(knot theory)에서 수학자들은 무작위로 만든 닫힌 고리가 매듭지어져 있을 확률이 얼마인가라는 더 어려운 질문을 던진다. 긴 무작위 고리에 대해서는 그 답이 1로 수렴하며, 이 결과는 1988년 De Witt Sumners와 Stuart Whittington이 증명하였다.

더 도전하기

1 **작은 경우.** $n = 2$일 때 가능한 경우를 모두 나열하고, 고리 개수의 기댓값이 $\frac{4}{3}$임을 확인하여라.

2 **하나의 큰 고리.** 모든 끈을 포함하는 고리 하나로 과정이 끝날 확률이 $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)$임을 보이고, n이 클 때 이 값이 근사적으로 $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$임을 보여라. (**힌트:** 이 곱을 $\binom{2n}{n}$과 관련지어라.)

3 **순열의 순환.** 순열을 원소 하나씩 만들어 가는 방법("중국 식당(Chinese restaurant)" 구성)으로, n개 대상의 무작위 순열이 갖는 순환 개수의 기댓값이 H_n임을 보여라.

4 **분산.** $\operatorname{Var}(R) = \mathrm{E}(R) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$임을 보이고, 빼는 합이 $\frac{\pi^2}{8}$로 수렴함을 보여라.

더 읽을거리

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection*** (A K Peters). 끈 묶기 퍼즐이 실려 있다.
- **Richard Arratia, Andrew Barbour & Simon Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structures*** (European Mathematical Society). 순환, 소수, 무작위 구조를 다루며, 나중을 위한 책이다.
- **Colin Adams, *The Knot Book*** (American Mathematical Society). 무작위 매듭을 포함한 매듭 이론 입문서이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 12.10절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/loose-ends.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com