11.9 안전 포물선

학습지

문제

STEP II 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 x와 y를 t로 나타낸 다음 t를 소거하여라. $\sec^2\theta$를 $\lambda = \tan\theta$로 어떻게 나타낼 수 있는가?

1단계 x를 고정하고 각을 변화시키기

다루는 내용: 주어진 x 위에서의 최대 높이 Y

잠깐, 직접 해 보기 $x > 0$을 고정하고 y를 λ만의 함수로 생각하라. 이것은 어떤 종류의 함수인가? 그 최댓값을 구하라. (또는: λ에 대한 이차식이 실근(real root)을 가질 조건은 무엇인가?)

2단계 영역

다루는 내용: 그래프와 도달 가능한 영역

생각해 보기 곡선 Y의 개형을 그려 보라. 꼭짓점(vertex)은 어디에 있고, 지면과는 어디에서 만나는가? 어떤 점들에 도달할 수 있는가? 곡선 아래의 한 점을 지나는 궤적(trajectory)은 몇 개이고, 곡선 위의 한 점을 지나는 궤적은 몇 개인가?

3단계 가장 먼 점

다루는 내용: O로부터의 최대 거리

> **생각해 보기** 가장 먼 점은 경계(boundary) 위에 있다. $x^2 + Y^2$을 $X = x^2$의 함수로 나타내라. 이 함수는 증가하는가, 감소하는가? 경계를 따라 어디에서 가장 큰가?

숨은 수학

포락선

일매개변수 곡선족(one-parameter family of curves) $\mathrm{F}(x, y, \lambda) = 0$은 종종 **포락선**, 즉 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선을 갖는다. 포락선은 $\mathrm{F} = 0$과 $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda} = 0$을 연립하여 풀면 구할 수 있는데, 이는 우리가 λ에 대하여 y를 최대화하면서 한 일과 정확히 같다. 포락선은 과학 곳곳에 나타난다. 커피 잔 표면에 보이는 밝은 빛의 곡선은 반사된 광선들의 포락선으로, **화선**(caustic)이라고 한다. 초음속 항공기의 소닉 붐은 항공기가 내는 음파들의 포락선인 **마하 원뿔**(Mach cone)을 따라 전달된다. 그리고 Section 8.1에서는 미분방정식의 해들로 이루어진 곡선족의 포락선이 그 자체로 해, 곧 "특이"해였다.

초점

안전 포물선에는 놀라운 성질이 있다. 그 초점(focus)이 발사점 O라는 것이다. (포물선 $y = c - \frac{x^2}{4c}$의 초점은 원점이며, 여기서는 $c = \frac{u^2}{2g}$이다.) 각 궤적 역시 포물선이고, 모든 궤적의 초점은 O를 중심으로 하는 반지름 $\frac{u^2}{2g}$인 원 위에 있다. 이는 에너지로 설명할 수 있다. 높이 y에서 발사체의 속력은 $\sqrt{u^2 - 2gy}$이고, 이 값은 준선(directrix)의 높이 $\frac{u^2}{2g}$에서 0이 된다. 그리고 준선이 같은 직선이면서 O를 지나는 포물선들은 그 초점이 이 원 위에 있다.

토리첼리의 포물선

갈릴레이(Galileo)는 1609년 무렵 발사체가 포물선을 따라 움직이며, 평지에서의 최대 사거리는 45°일 때 얻어진다는 것을 보였다. 그의 제자이자 기압계의 발명자로 더 잘 알려진 에반젤리스타 토리첼리(Evangelista Torricelli)는 1644년 *De motu gravium*에서 안전 포물선을 발견하였다. 포병들에게 이것은 실용적인 질문, 즉 애초에 어떤 표적들이 사정거리 안에 있는가에 대한 답이었다. 토리첼리는 또한 주어진 점을 지나는 궤적들이 쌍으로 나타나며, 그 각도들이 그 점의 방향과 연직 방향에 대하여 대칭임을 보였다. 이것이 바로 이 문제의 높은 발사와 낮은 발사이다.

더 도전하기

1 **폭발하는 불꽃놀이.** STEP II 2023, 10번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip)에 도전해 보아라. 이 문제는 폭발로 흩어지는 입자들을 중심이 자유낙하하는 구로 보고, 안전 포물면을 따라 움직이는 입자를 찾는다.

2 **비탈 위로 쏘기.** 경사각이 β인 비탈면 위쪽으로 속력 u로 쏜 발사체의 최대 사거리를 구하여라. (**힌트:** 직선 $y = x\tan\beta$는 안전 포물선과 어디에서 만나는가?) 최적의 발사 방향이 비탈면과 연직 방향 사이의 각을 이등분함을 보여라.

3 **두 각도.** 점 P에 도달하는 두 각도가 OP와 연직 방향 사이의 각의 이등분선에 대하여 대칭임을 보여라.

4 **초점들.** 각도가 θ인 궤적의 초점이 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$임을 보이고, 이로부터 초점들이 O를 중심으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press, 고전역학 입문서), 3장. 궤적들의 포락선을 다룬다.
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981). 기하학에서의 포락선과 화선.
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves*** (Cambridge University Press, 곡선에 관한 책). 포락선, 화선을 비롯한 여러 고전적인 곡선들을 작도법과 함께 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.9절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/safety-parabola.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com