11.8 기울어진 평형

학습지

문제

STEP III 2025, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 입체가 곡면 위의 한 점 X에서만 탁자에 닿은 채 놓여 있다. 이 입체에 작용하는 힘은 무게(무게중심 G에 작용한다)와 X에서의 수직항력(reaction)이다. 언제 이 힘들이 평형을 이루는가?

1단계 무게중심

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 입체를 반지름 x, 두께 δx, 높이 y인 얇은 원통 껍질(cylindrical shell)로 잘라 보자. 껍질 하나의 부피는 얼마이고, 그 무게중심(centre of mass)은 얼마나 높은 곳에 있는가?

생각해 보기 적분하여 부피와 밑면에 대한 모멘트(moment)를 구한 다음, 나눈다.

2단계 법선이 축과 만나는 곳

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $x = rp$에서 곡선의 기울기를 구하고, 이로부터 법선(normal)의 기울기를 구한다. 법선을 따라 y축까지 가 보자. 이때 y는 얼마나 변하는가?

잠깐, 직접 해 보기 $n = 4$일 때, 구한 Y를 p에 대하여 미분하여 최댓값을 구한다. $p \to 0$일 때와 $p = 1$일 때는 어떻게 되는가?

3단계 팽이

다루는 내용: 소문항 (iii), 무게중심

생각해 보기 이 입체는 소문항 (i)의 입체 두 개로 이루어져 있고, 그중 하나는 거꾸로 뒤집혀 있다. 앞에서 구한 부피와 무게중심을 이용하여 G를 구한다.

4단계 평형 상태 세기

다루는 내용: 소문항 (iii), 기울어진 평형 상태

> **잠깐, 직접 해 보기** 입체가 한 점에서 닿은 채로 정지해 있을 수 있는 것은 그 점에서의 법선이 G를 지날 때, 그리고 그때뿐이다. 곡면의 각 부분에서, 법선이 G의 높이에서 축과 만나는 점은 몇 개인가? 소문항 (ii)의 답을 이용한다.

숨은 수학

임계점으로서의 평형 위치

입체가 점 X로 정지해 있을 때, 탁자로부터 G의 높이는 G에서 X에서의 접평면(tangent plane)까지의 거리이며, 볼록한 물체에서 GX가 법선 방향이면 이 거리는 $|GX|$이다. 일반적으로 평형 위치는 G에서 표면까지 거리의 **임계점**(*critical point*)이다. $|GX|$가 정상값을 가지는 점 X는 바로 그 점의 법선이 G를 지나는 점이다. 안정한 평형 위치는 이 거리의 극소점(local minimum)이고(G가 가능한 한 낮다), 불안정한 평형 위치는 극대점(local maximum)이나 안장점(saddle point)이다.

단면을 따라 A에서 B까지 돌아가면 G로부터의 거리는 다음과 같이 변한다. A에서는 크고(극대: 뾰족한 끝으로 균형을 잡고 있으므로 불안정), 밑부분의 기울어진 점에서는 더 작고(극소, 안정), 테두리에서는 더 크고, 돔의 아래쪽 기울어진 점에서는 더 작고(안정), 위쪽 점에서는 더 크며(불안정), B에서는 더 작다(안정: 돔의 꼭대기로 놓여 있다). 그림에서 보듯이 극소와 극대는 번갈아 나타나야 한다. (사실 문제에서 세지 않는 평형 위치가 하나 더 있다. 입체는 표면의 법선이 하나로 정해지지 않는 날카로운 테두리 위에서도 불안정하게 균형을 잡을 수 있다.)

괴뫼츠

볼록한 물체는 최소 몇 개의 평형 위치를 가질 수 있을까? 어떤 물체든 적어도 하나의 안정한 위치와 하나의 불안정한 위치를 가진다. 바로 표면에서 G에 가장 가까운 점과 가장 먼 점이다. 밀도가 균일한 2차원 볼록 도형은 항상 적어도 네 개를 가진다(거리의 극소 둘과 극대 둘이 번갈아 나타난다). 1995년에 블라디미르 아르놀트(Vladimir Arnold)는 밀도가 균일한 3차원 볼록 물체가 단 두 개, 즉 안정한 위치 하나와 불안정한 위치 하나만 가질 수 있는지 물었다. 2006년에 Gábor Domokos와 Péter Várkonyi가 그런 물체를 만들어 냈는데, 이것이 **괴뫼츠**이다. 이 물체는 어떤 자세로 내려놓아도 구르고 흔들리다가 단 하나뿐인 안정한 위치에 이른다. 나중에 Domokos는 어떤 거북의 등딱지가 이 모양에 가깝다는 것을 알아차렸는데, 이 모양 덕분에 거북은 뒤집혔을 때 몸을 다시 바로 세우기가 쉬워진다.

아르키메데스와 물에 뜨는 물체

물체의 안정성에 대한 연구는 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라간다. 그는 **부체에 관하여**(On Floating Bodies)에서 물에 뜬 회전 포물면(배 선체의 모형)이 언제 똑바로 선 채 안정하고 언제 뒤집히는지를 그 모양과 밀도로 분석했다. 오직 기하만으로 얻어낸 그의 답에는 여기에서 쓴 것과 똑같은 종류의 무게중심과 법선 계산이 들어 있다. 조선 기술자들은 지금도 **메타센터**(*metacentre*)라는 형태로 그의 아이디어를 사용한다. 부력 중심(centre of buoyancy)을 지나는 연직선이 배의 축과 만나는 점이 무게중심보다 위에 있으면 배는 안정하다.

더 도전하기

1 **스스로 일어서는 장난감.** STEP II 1996, 9번 문제 (step.maths.org/questions/96-s2-q9)에 도전해 보라. 반구 위에 원뿔을 얹은 물체는 언제 스스로 바로 서는가? (**힌트:** G는 반구의 중심에 대하여 어디에 있어야 하는가?)

2 **구.** 밀도가 균일한 속이 찬 구에서는 모든 법선이 중심을 지난다. 이것은 구의 평형 위치에 대해 무엇을 말해 주는가? 구의 무게중심이 중심에서 약간 벗어나 있다면 어떻게 되는가?

3 **타원.** 직선 위에서 자신의 평면 안에서 구르는 타원판은 평형 위치를 정확히 네 개 가짐을 보이고, 그 가운데 어느 것이 안정한지 밝혀라.

4 **두 회전 포물면.** 소문항 (iii)의 돔을 회전 포물면 $ry = r^2 - x^2$로 바꾸어 입체가 x축에 대하여 대칭이 되게 하자. G가 원점에 있음을 보이고, 기울어진 평형 위치를 구하고, 이 평형 위치들이 왜 기울기가 같은 것끼리 쌍을 이루는지 설명하라.

더 읽을거리

- **Péter Várkonyi & Gábor Domokos, "Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem"**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006). 괴뫼츠를 발표한 논문이다.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 평형과 안정성을 다룬다.
- **Chris Rorres, "Completing Book II of Archimedes's *On Floating Bodies*"**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004). 아르키메데스의 안정성 분석을 현대적인 그림과 함께 소개한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/tilted-equilibria.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com